Réponses du devoir surveillé de Mathématiques n°3

Exercice 1 (section hexagonale d'un cube)

1. $\mathcal{P} : x + y + 2(\alpha - 1)z = \alpha$.
2. $P(0; 1; \frac{1}{2})$, $Q(1 - \alpha; 1; 1)$, $R(1; 1 - \alpha; 1)$ et $S(1; 0; \frac{1}{2})$.
3. $\alpha = \frac{1}{2}$.
4. Les côtés ont pour longueur $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2 (quelques propriétés du tétraèdre régulier)

1. $AB = AC = AD = BC = BD = CD = 1$.
2. $a = \sqrt{3}$.
3. $v = \frac{1}{6}|\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{\sqrt{2}}{12}$ et $h = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
4. $\Omega(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4})$, $d = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega B}}{||\overrightarrow{\Omega A}|| \times ||\overrightarrow{\Omega B}||}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.
5. $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $\beta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{||\overrightarrow{n_1}|| \times ||\overrightarrow{n_2}||}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = \pi - \alpha$.

Exercice 3 (équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants)

1. On remarque que $f''(t) = 4t^2 f(t) + \frac{1}{t} f'(t)$ et $g''(t) = 4t^2 g(t) + \frac{1}{t} g'(t)$.
2. $(E_1) : y(t) = \lambda t$, $(E_2) : y(t) = -\frac{a}{4} e^{-t^2} + \mu e^{t^2}$.
3. On montre que $w'(t) = \frac{1}{t} w(t)$.
4. On en déduit que $w(t) = \lambda t$ d'où $y'(t) - 2ty(t) = \lambda t e^{-t^2}$ (on a donc $a = \lambda$).
5. $(E) : y(t) = \lambda e^{t^2} + \mu e^{-t^2}$ (en remplaçant $\frac{\lambda}{4}$ par λ).

Exercice 4 (équation fonctionnelle)

1. Si $a = 0$ on a $y(t) = \lambda t$, si $a > 0$ on a $y(t) = \lambda \sin(\sqrt{a} t)$ et si $a < 0$ on a $y(t) = \lambda \text{sh}(\sqrt{-a} t)$.
2. $0 \times 0 = 0^2 - 0^2$, $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$, $\sin(x+y)\sin(x-y) = (\sin x \cos y)^2 - (\sin y \cos x)^2 = (\sin x)^2[1 - (\sin y)^2] - (\sin y)^2[1 - (\sin x)^2] = (\sin x)^2 - (\sin y)^2$ et $\text{sh}(x+y)\text{sh}(x-y) = \frac{(e^{x+y} - e^{-x-y})(e^{x-y} - e^{-x+y})}{2} = \frac{e^{2x} - e^{2y} - e^{-2y} + e^{2x}}{2} = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 = (\text{sh} x)^2 - (\text{sh} y)^2$.
3. Pour $x = y = 0$, on a $f(0)^2 = 0$.
4. On dérive par rapport à x puis par rapport à y et on obtient $f''(x+y)f(x-y) - f(x+y)f''(x-y) = 0$, on pose $t = x + y$ et $s = x - y$.
5. Si f est nulle c'est évident avec $a = 0$ sinon il existe s tel que $f(s) \neq 0$ et on prend $a = \frac{f''(s)}{f(s)}$.
6. Les solutions sont de la forme $f(t) = \lambda t$, $f(t) = \lambda \sin(\mu t)$ et $f(t) = \lambda \text{ sh}(\mu t)$.