Devoir libre de Mathématiques n°3

Exercice 1

On considère l'équation fonctionnelle $(E) : y'(t) = y(-t) - t^2 \ , \ t \in \mathbb{R}$ avec y une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une solution de (E) est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on résoudra.*(analyse)*
2. En déduire les solutions de l'équation (E).*(synthèse)*

Exercice 2

On considère l'application du plan complexe $h : M(z) \mapsto M'(z')$ définie par $z' = \dfrac{z+1}{z-1}$ pour $z \neq 1$.

On note :

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{C} & = & \{M(z)\ ,\ |z| = 1\ ,\ z \neq 1\} \\ \mathcal{C}_+ & = & \{M(z)\ ,\ |z| > 1\} \\ \mathcal{C}_- & = & \{M(z)\ ,\ |z| < 1\} \\ \mathcal{D} & = & \{M(z)\ ,\ \mathcal{R}e(z) = 0\} \\ \mathcal{D}_+ & = & \{M(z)\ ,\ \mathcal{R}e(z) > 0\ ,\ z \neq 1\} \\ \mathcal{D}_- & = & \{M(z)\ ,\ \mathcal{R}e(z) < 0\} \end{array}$$

1. (a) Montrer que $h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{D} \subset h(\mathcal{C})$.
   On en déduit que $h(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.*(égalité par double inclusion)*
2. Montrer que $h(\mathcal{D}) = \mathcal{C}$.
3. Déterminer $h(\mathcal{C}_+)$, $h(\mathcal{C}_-)$, $h(\mathcal{D}_+)$ et $h(\mathcal{D}_-)$.