Devoir libre de Mathématiques n°2

Exercice 1

Démontrer que pour tout $x \in [0;1[$, $\arcsin x \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.

1. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est définie et dérivable.
2. Montrer que $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$ pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$, en déduire les primitives de la fonction f sur les intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;+\infty[$.
3. Calculer les intégrales $I_1 = \displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$, $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$ et $I_3 = \displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$.

Exercice 3

1. On considère la fonction $g : x \mapsto 2\arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.
   (a) Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée g'.
   (b) En déduire une expression simplifiée de la fonction g.
2. On considère la fonction $h : x \mapsto 2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.
   (a) Montrer que la fonction h est définie sur $]-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$ et calculer sa dérivée h'.
   (b) En déduire une expression simplifiée de la fonction h.