Correction du devoir libre de Mathématiques n°7

(Cissoïde de Dioclès)

1. (a) $\mathcal{D}_f = [0;1[$. (on étudie le signe de $\frac{x^3}{1-x}$)

   (b) La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;1[$.

   (c) On a $f'(x) = \dfrac{x^2(3-2x)}{2(1-x)^2}\sqrt{\dfrac{1-x}{x^3}}$ pour $x \in]0;1[$ donc $f'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 0$, la fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

   (d) $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \underset{0}{\sim} \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ n'admet pas de limite finie pour $x \underset{x>0}{\to} 0$.

2. (a) Si $M(x;y) \in \mathcal{C}$ alors $M(x;-y) \in \mathcal{C}$ donc $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

   (b) Pour $x \underset{x<1}{\to} 1$ on a $y^2 = \dfrac{x^3}{1-x} \to +\infty$ donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote d'équation $x = 1$.

   (c) La courbe $\mathcal{C}$ est la réunion des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$ qui admettent toutes deux en l'origine une tangente d'équation $y = 0$ car $f'(0) = 0$.

(d)