Devoir surveillé de Mathématiques n°6

N.B : L'élève attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un élève est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 **(prolongement par continuité)**

On considère la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^{1+\frac{1}{x}} - (1-x)^{1-\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Déterminer la limite à gauche en 1 de la fonction f.
4. Déterminer la limite à droite en -1 de la fonction f.
5. Étudier la limite en 0 de la fonction f.
   (on admettra que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$)
6. Montrer que la fonction f peut se prolonger par continuité sur l'intervalle $[-1;1]$ en une fonction $\tilde{f}$ que l'on précisera.

Exercice 2 **(étude d'une symétrie)**

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère la symétrie s par rapport à $F = \text{Vect}(1, X)$ parallèlement à $G = \text{Vect}(1 + X + X^2)$.

1. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = \left(1, X, 1 + X + X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Exprimer les coordonnées d'un polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. En déduire $s(P(X))$.
5. Montrer que $s(P(X)) = P(X) - P''(0)(X^2 + X + 1)$ pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$.
6. Montrer que l'application $\sigma : P(X) \mapsto P(X) - P''(0)(X^2 + X + 1)$ est également une symétrie dans $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n > 2$ et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 3 (résolution d'une équation différentielle)

On considère l'ensemble F des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs complexes solutions de l'équation différentielle $y''' = y$ et l'ensemble G des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle $y''' = y$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et que G est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. On note $f_z : t \mapsto e^{zt}$ avec $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Montrer qu'il existe trois valeurs distinctes z_0, z_1 et z_2 de z pour lesquelles $f_z \in F$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Vect}\,(f_{z_0}, f_{z_1}, f_{z_2}) \subset F$.
3. Montrer que si $f \in F$ alors $f + f' + f''$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 et en déduire que $F = \mathrm{Vect}\,(f_{z_0}, f_{z_1}, f_{z_2})$.
4. Déterminer G.

Exercice 4 (suite récurrente linéaire à coefficients non constants)

On considère l'ensemble E des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - \frac{(n+1)(n+4)}{(n+2)(n+3)}u_n \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel des suites réelles.
2. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $a_0 = 1$ et $a_1 = \dfrac{1}{2}$.
   (a) Calculer les cinq premiers termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Conjecturer une forme explicite pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Démontrer cette conjecture par récurrence.
3. On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $b_0 = 6$ et $b_1 = 12$.
   (a) Calculer les cinq premiers termes de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Conjecturer une forme explicite pour la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Démontrer cette conjecture par récurrence.
4. Déterminer une forme explicite pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E en fonction de u_0, u_1 et n.