VII. Systèmes linéaires - Matrices

1 Systèmes d'équations linéaires

1.1 Définition d'un système d'équations linéaires

Définition 1. *On appelle* **système linéaire** *de n équations à p inconnues le système d'équations :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}u_1 & + & a_{1,2}u_2 & + & \dots & + & a_{1,p}u_p & = & v_1 \\ a_{2,1}u_1 & + & a_{2,2}u_2 & + & \dots & + & a_{2,p}u_p & = & v_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n,1}u_1 & + & a_{n,2}u_2 & + & \dots & + & a_{n,p}u_p & = & v_n \end{array}\right.$$

Les nombres réels ou complexes $\{u_j\}_{1\leqslant j\leqslant p}$ sont les inconnues du système et les nombres réels ou complexes $\{a_{i,j}, v_i\}_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ les coefficients du système.

En posant $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, *ce système se note $AU = V$, A est alors appelée* **matrice associée** *au système.*

Un système tel que $V = 0$ est dit **homogène**, *le système linéaire $AU = 0$ est appelé* **système linéaire homogène associé** *au système $AU = V$.*

Exercice 1. *Écrire matriciellement les systèmes linéaires suivants :*

$$\mathcal{S}_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x + 2z & = & 1 \\ -x + y + z & = & 1 \\ -y - 3z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \mathcal{S}_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ x - 2y & = & 1 \\ 5x - y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \mathcal{S}_3 : \left\{\begin{array}{rcr} x - 2y & = & -1 \\ 3x + z & = & 1 \end{array}\right.$$

Définition 2. *On appelle* **solution** *d'un système linéaire $\mathcal{S} : AU = V$ d'inconnue U et de matrice associée A une valeur de U vérifiant l'équation $AU = V$. Résoudre un système linéaire c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.*

Exercice 2. *Résoudre les systèmes de l'exercice 1 en procédant par substitution.*

1.2 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire

Définition 3. *On définit trois types d'***opérations élémentaires** *sur les lignes d'une système linéaire :*
- *échange des lignes i et j : $L_i \leftrightarrow L_j$.*
- *multiplication de la ligne i par $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$.*
- *ajout à la ligne i de la ligne $j \neq i$ multipliée par λ : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.*

Exercice 3. *Effectuer successivement les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ sur le système linéaire* $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ x-2z &=& 1 \\ 2x+y-z &=& 3 \end{array}\right.$

En déduire les solutions du système.

Exercice 4. *Décomposer l'opération $L_i \leftarrow 3L_i - 2L_j$ en suite de deux opérations élémentaires de deux manières différentes.*

Propriété 1. *Une opération élémentaire sur les lignes d'un système admet une opération réciproque.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 5. *Donner des opérations sur les lignes d'un système n'admettant pas d'opération réciproque.*

Corollaire 1. *Deux systèmes linéaires pour lesquels on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes ont le même ensemble de solutions.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 6. *Déterminer les solutions du système linéaire* $\left\{\begin{array}{rcr} x+2y-z &=& 2 \\ x+y-2z &=& -3 \\ 2x+y-z &=& 1 \end{array}\right.$ *en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes.*

Définition 4. *On appelle* **systèmes équivalents***, deux systèmes linéaires pour lesquels on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.*

On appelle **matrices équivalentes en ligne***, deux matrices A et A' pour lesquelles on passe de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, on note $A \underset{L}{\sim} A'$.*

Exercice 7. *Montrer que les matrices* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *sont équivalentes en lignes.*

Définition 5. *On appelle* **matrice augmentée** *d'un système linéaire $AU = V$ la matrice $(A\backslash V)$ obtenue en ajoutant à droite la colonne V à la matrice A associée au système.*

Exercice 8. *Déterminer la matrice augmentée M du système* $\left\{\begin{array}{rcl} -x+y+z &=& 1 \\ x+y+z &=& 1 \\ 2x+y &=& 1 \end{array}\right.$ *puis résoudre celui-ci en effectuant des opérations élémentaires sur M.*

Propriété 2. *Si on passe d'un système linéaire $\mathcal{S}$ à un système linéaire $\mathcal{S}'$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes alors la matrice augmentée de $\mathcal{S}'$ s'obtient à partir de celle de $\mathcal{S}$ par la même suite d'opérations.*

Démonstration. Exigible. □

1.3 Échelonnement d'un système linéaire

Définition 6. *On appelle* **matrice échelonnée en lignes***, une matrice telle que :*
- *si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi,*
- *à partir de la deuxième ligne, dans toute ligne non entièrement nulle, le premier coefficient non nul est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*

Exemple 1. *Les matrices* $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ *sont échelonnées en lignes.*

Définition 7. *On appelle* **pivot** *d'une ligne non entièrement nulle son premier coefficient non nul.*

On appelle **matrice échelonnée réduite en lignes** *une matrice échelonnée dont tous les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.*

Exercice 9. *Montrer que les matrices M_1 et M_2 de l'exemple 1 sont équivalentes en lignes à des matrices échelonnées réduites en lignes que l'on déterminera.*

Théorème 1. *Toute matrice non nulle est équivalente en lignes à une unique matrice échelonnée réduite en lignes.*

Démonstration. Non exigible en ce qui concerne l'existence (algorithme de Gauss-Jordan), l'unicité est Hors-programme. □

Exercice 10. *Déterminer la matrice échelonnée réduite en lignes équivalente en lignes à la matrice* $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

1.4 Résolution d'un système linéaire

Définition 8. *On appelle* **rang d'un système linéaire** *le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite équivalente en lignes à la matrice associée au système.*

Exercice 11. *Déterminer le rang des systèmes suivants :*

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -4x + 11y - 7z = 2 \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases} \quad \mathcal{S}_3 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 3z = 1 \end{cases}$$

Propriété 3. *On considère un système linéaire dont la matrice associée est échelonnée réduite en lignes, on note r son rang et p son nombre d'inconnues.*
- *Si le système comporte une ligne dont le membre de gauche est nul et pas celui de droite il n'admet aucune solution et est dit* **incompatible***,*
- *dans le cas contraire le système est dit* **compatible***, il admet :*
  - ◇ *une solution unique si $r = p$,*
  - ◇ *une infinité de solutions si $r < p$, l'ensemble des solutions étant alors paramétré par $p-r$* **inconnues secondaires***.*

Démonstration. Exigible - On passe les inconnues situées sur les colonnes ne comportant pas de pivot dans le membre de droite. □

Exercice 12. *Résoudre les systèmes de l'exercice 11.*

Propriété 4. *Les solutions d'un système linéaire $\mathcal{S}$ compatible sont de la forme $U = \tilde{U} + U_H$ où $\tilde{U}$ est une solution particulière de $\mathcal{S}$ et U_H une solution quelconque du système linéaire homogène $\mathcal{S}_H$ associé à $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 13. *Vérifier la propriété sur les sytèmes $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$ de l'exercice 11.*

1.5 Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Définition 9. *On appelle* **combinaison linéaire** *d'une* **famille de vecteurs** *de* $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p)$, *un vecteur* $\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{u}_p$ *avec* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

Exemple 2. $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ *et* $2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ *sont des combinaisons linéaires de la famille* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Définition 10. *On note* $\text{Vect}(\mathcal{F})$ *l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs* $\mathcal{F}$ *de* $\mathbb{R}^n$.

Exercice 14. *On considère une famille de vecteurs* $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *ainsi qu'un vecteur* $\overrightarrow{e}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire sur $(a; b; c)$ *pour que le système* $\overrightarrow{e} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ *d'inconnues* λ, μ *admette une solution, en déduire* $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

Définition 11. *Une famille de vecteurs* $\mathcal{F}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est dite* **génératrice** *de* $\mathbb{R}^n$ *si* $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^n$.

Exercice 15. *On considère une famille de vecteurs* $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *ainsi qu'un vecteur* $\overrightarrow{e}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Montrer que le système $\overrightarrow{e} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}$ *d'inconnues* λ, μ, ν *admet une solution. En déduire que* $\mathcal{F}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$.

Définition 12. *Une famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *est dite* **libre** *si aucun de ses vecteurs ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres. Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite* **liée**.

Remarque 1. *Deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre, trois vecteurs non coplanaires forment une famille libre.*

Exercice 16. *On considère une famille de vecteurs* $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ *de* $\mathbb{R}^3$.

Résoudre le système $\overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}$ *d'inconnues* λ, μ, ν. *En déduire que la famille* $\mathcal{F}$ *est liée.*

2 Matrices

2.1 Opérations sur les matrices

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 13. *On appelle* **matrice** *à n lignes et p colonnes à coefficients réels ou complexes un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes de nombres réels ou complexes :*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note a_{ij} le coefficient de la matrice A situé sur la i-ième ligne et sur la j-ième colonne.

Une matrice comportant une seule ligne est appelée **matrice ligne***, une matrice comportant une seule colonne est appelée* **matrice colonne***, une matrice comportant le même nombre de lignes que de colonnes est appelée* **matrice carrée***.*

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exercice 17. *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, donner les coefficients a_{12} a_{22} et a_{23}.*

Définition 14. *Étant données deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit :*

$$\lambda.A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Exercice 18. *Calculer $2A - 3B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.*

Propriété 5. *L'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est associative et commutative.*

Démonstration. Exigible. $\square$

Définition 15. *On définit le* **produit matriciel** *de deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ par :*

$$A \times U = \left(\sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} u_k \right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} u_k \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 2. *Le produit AU est la matrice colonne obtenue par combinaison linéaire des colonnes de A avec les coefficients de U, il n'a de sens que si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice U.*

Exercice 19. *Calculer AU avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.*

Exercice 20. *Écrire matriciellement les systèmes linéaires suivants :*

$$\mathcal{S}_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2z & = & 1 \\ -x + y + z & = & 1 \\ -y - 3z & = & 1 \end{array} \right. \qquad \mathcal{S}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ x - 2y & = & 1 \\ 5x - y & = & 2 \end{array} \right. \qquad \mathcal{S}_3 : \left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y & = & -1 \\ 3x + z & = & 1 \end{array} \right.$$

Définition 16. *On définit le* **produit matriciel** *de deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ par :*

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \times (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} = \left(\sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 3. *Le produit $A \times B$ est une matrice dont les colonnes sont obtenues par produit de A par les colonnes de B, il n'a de sens que si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B.*

Exercice 21. *Calculer $A \times C$ et $C \times A$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.*

Propriété 6. *Le produit matriciel est associatif et distributif par rapport à l'addition.*

Démonstration. Non exigible. □

2.2 Matrices carrées

Définition 17. *Une matrice carrée A est apelée :*
- **matrice diagonale** *si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$*
- **matrice triangulaire supérieure** *si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$*
- **matrice triangulaire inférieure** *si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$*

Exercice 22. *Montrer que le produit de deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale. Que peut-on dire du produit de deux matrices triangulaires ?*

Définition 18. *On appelle* **matrice identité** *de taille n la matrice carrée $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$ de taille n dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et dont les autres coefficients sont nuls.*

Exercice 23. *Que valent les produits AI_n et I_nA pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?*

Définition 19. *On définit les* **puissances d'une matrice** *carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la récurrence :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A^0 & = & I_n \\ A^{m+1} & = & A(A^m) \text{ , pour tout } m \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Exercice 24. *Calculer les puissances de la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Propriété 7. *On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors pour tout $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ on a $A^{m_1}A^{m_2} = A^{m1+m2}$.*

Démonstration. Exigible - La démonstration rigoureuse s'effectue par récurrence (chapitre VIII) sur m_1. □

Exercice 25. *On considère $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, développer $(A + I_n)^3$ et $(A + B)^3$.*

Propriété 8. **Formule du binôme**
On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et $m \in \mathbb{N}$, alors :

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^{k=m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} A^{m-k}B^k$$

Démonstration. Non exigible - On montre d'abord que si $AB = BA$ alors $A^{m_1}B^{m_2} = B^{m_2}A^{m_1}$ puis on procède par récurrence sur m. □

Remarque 4. *Il ne faut pas oublier de vérifier que les matrices A et B commutent entre elles !*

Exercice 26. *Calculer les puissances de la matrice triangulaire supérieure* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *en utilisant la formule du binôme.*

Définition 20. *Une matrice carrée* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est dite inversible s'il existe une matrice carrée* $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *appelée* **inverse** *de la matrice* A *telle que* $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Remarque 5. *L'inverse s'il existe est unique.*

Remarque 6. *La matrice identité est inversible et est son propre inverse.*

Exercice 27. *Montrer que la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *est inversible et déterminer son inverse.*

Propriété 9. *On considère une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *s'il existe* $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $GA = I_n$ *ou s'il existe* $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $AD = I_n$ *alors* A *est inversible et* $A^{-1} = G = D$.

Démonstration. Hors-programme. □

Propriété 10. *On considère deux matrices* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversibles et* $m \in \mathbb{N}$, *alors :*

- A^m *est inversible et* $\boxed{(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m}$,
- AB *est inversible et* $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$.

Démonstration. Exigible. □

Définition 21. *On appelle* **groupe linéaire** *et on note* $GL_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices inversibles de taille* n.

Propriété 11. *On considère un système linéaire* $AU = V$ *de* n *équations à* n *inconnues, si* A *est inversible alors ce système admet une unique solution* $U = A^{-1}V$.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 12. *On considère une matrice carrée* A, *si pour toute matrice colonne* V *le système linéaire* $AU = V$ *admet une unique solution alors* A *est inversible.*

Démonstration. Non exigible - on considère la matrice dont la k-ième colonne est solution du système pour V égal à la k-ième colonne de la matice identité I_n. □

Exercice 28. *Résoudre le système* $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 5z & = & a \\ 2x & + & y & + & 6z & = & b \\ 3x & + & 4y & & & = & c \end{array}\right.$.

En déduire que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *est inversible et déterminer son inverse.*

2.3 Matrices et applications linéaires

Définition 22. *On considère une matrice* $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et les espaces vectoriels* $\mathbb{K}^p$ *et* $\mathbb{K}^n$*, on appelle* **application linéaire** *associée à* A *l'application* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} \end{array}$ *avec* $AU = V$ *où* U *et* V *représentent les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$.

Exemple 3. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *est associée à l'application linéaire* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$.

Exercice 29. *Déterminer la matrice* A *associée à l'application linéaire* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \end{pmatrix} \end{array}$.

Exercice 30. *Déterminer l'application linéaire* f *associée à la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Définition 23. *On appelle* **noyau** *d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et on note* $\operatorname{Ker} A$ *l'ensemble des antécédents du vecteur nul par l'application linéaire* f *associée à* A.

Exercice 31. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Résoudre le système linéaire* $AU = 0$ *en procédant par échelonnement-réduction et en déduire le noyau de la matrice* A.

Définition 24. *On appelle* **image** *d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et on note* $\operatorname{Im} A$ *l'ensemble des images des vecteurs de* $\mathbb{K}^p$ *par l'application linéaire* f *associée à* A.

Remarque 7. $\operatorname{Im} A$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs associés aux colonnes de la matrice* A.

Exercice 32. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur* V *pour que le système linéaire* $AU = V$ *admette une solution (on procédera par échelonnement-réduction) et en déduire l'image de la matrice* A.

Définition 25. *On appelle* **rang** *d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et on note* $\operatorname{rg} A$ *le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite équivalentes en lignes à la matrice* A.

Exercice 33. *Déterminer le rang de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.