XVI. Probabilités

1 Espaces probabilisés

1.1 Vocabulaire des probabilités

Définition 1. *On appelle* **expérience aléatoire** *une expérience dont le résultat est lié au hasard. Chaque résultat possible est appelé une* **issue**, *l'ensemble des issues est appelé* **univers**.

Exemple 1. *Le lancer d'une pièce est une expérience aléatoire dont l'univers est* $\Omega = \{P, F\}$. *Le lancer d'un dé cubique est une expérience aléatoire dont l'univers est* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exercice 1. *On considère le lancer de deux dés cubiques, déterminer l'univers de cette expérience aléatoire selon qu'ils sont discernables ou indiscernables.*

Définition 2. *On appelle* **événement** *un ensemble d'issues, c'est à dire une partie de l'univers. On distingue :*
- *événement* **élémentaire** *: il ne contient qu'une seule issue.*
- *événement* **impossible** *: il ne contient aucune issue.*
- *événement* **certain** *: il contient toutes les issues.*

Exercice 2. *On considère le lancer d'un dé cubique ainsi que les événements suivants :*
A *: « le 5 sort »*
B *: « un multiple de 2 sort »*
C *: « un multiple de 7 sort »*
D *: « un nombre inférieur à 7 sort »*
Déterminer les issues des événements A, B, C *et* D *et déterminer s'ils sont élémentaires, impossibles ou certains.*

Définition 3.
- *On note* $E_1 \cap E_2$ *l'***intersection** *de deux événements, c'est l'ensemble des issues appartenant à* E_1 et *à* E_2.
- *On note* $E_1 \cup E_2$ *l'***union** *de deux événements, c'est l'ensemble des issues appartenant à* E_1 ou *à* E_2.
- *On note* $\overline{E}$ *le* **contraire** *de l'événement* E, *c'est l'ensemble des issues qui n'appartiennent pas à* E.
- *Deux événements* E_1 *et* E_2 *sont dits* **incompatibles** *si* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, *c'est à dire qu'ils ne peuvent se réaliser en même temps.*

Remarque 1.
$$\overline{\Omega} = \emptyset \qquad \overline{\emptyset} = \Omega \qquad \overline{\overline{E}} = E \qquad E \text{ et } \overline{E} \textit{ sont incompatibles}$$

Exercice 3. *On considère les événements* A, B, C *et* D *de l'exercice 2, déterminer* $A \cup B$, $A \cap D$, $\overline{B}$ *et montrer que* A *et* B *sont incompatibles.*

Définition 4. *On appelle* **système complet d'événements** *d'une expérience aléatoire un ensemble d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est l'univers de l'expérience aléatoire.*

Exemple 2. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$ *est un système complet d'événements du lancer d'un dé cubique.*

Exercice 4. *Déterminer un système complet d'événements du lancer d'un dé cubique composé de trois événements non impossibles ou élémentaires.*

1.2 Notion de probabilité

Définition 5. *On appelle* **probabilité** *sur un univers* Ω*, une application* $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ *telle que* $P(\Omega) = 1$ *et* $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ *pour tous* $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$ *avec* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Le couple (Ω, P) *est appelé* **espace probabilisé***.*

Remarque 2. *On a* $P(\emptyset) = 0$.

Propriété 1. *On considère un espace probabilisé* (Ω, P)*, alors :*
- *Pour tout* $E \in \mathcal{P}(\Omega)$*, on a* $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E)$.
- *Pour tous* $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$ *avec* $E_1 \subset E_2$*, on a* $P(E_1) \leqslant P(E_2)$.
- *Pour tous* $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$*, on a* $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 2. *On considère un univers fini* $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *et des réels* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *positifs de somme égale à 1, alors il existe une unique probabilité* P *sur* Ω *telle que* $P(\{e_k\}) = p_k$ *pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$.

Si de plus $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$*, la probabilité est dite* **uniforme***.*

Démonstration. Exigible. □

Exemple 3. *On considère le lancer d'un dé cubique équilibré :*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

On considère le lancer d'un dé cubique truqué :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad P(\{6\}) = \frac{1}{3} \quad P(\{1\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{6} \quad P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{1}{12}$$

Propriété 3. *Étant donné un univers fini muni d'une probabilité, la probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités associées aux issues composant celui-ci.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 5. *Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé truqué de l'exemple 3.*

Propriété 4. *On considère un univers* Ω *contenant* n *issues muni d'une probabilité uniforme* P*, alors si* E *est un événement contenant* p *issues on a :*

$$P(E) = \frac{p}{n} = \frac{\textit{nombre d'issues favorables}}{\textit{nombre total d'issues}}$$

Démonstration. au programme. □

Exercice 6. *Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé équilibré de l'exemple 3.*

1.3 Indépendance et conditionnement

Exercice 7. *On considère une urne contenant 7 boules rouges et 13 boules vertes indiscernables et on tire successivement sans remise deux boules de l'urne.*

1. *Déterminer au moyen d'un arbre l'univers de cette expérience aléatoire.*
2. *Déterminer la probabilité de chacune des événements suivants :*
   - *« on obtient une boule rouge au premier tirage »*
   - *« on obtient une boule rouge au premier tirage et une boule rouge au second tirage »*
3. *Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on a obtenu une boule rouge au premier tirage ?*

Définition 6. *On considère un espace probabilisé* (Ω, P) *et deux événements* A *et* B *avec* $P(B) \neq 0$. *On appelle* probabilité de A sachant B *:*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exercice 8. *Calculer la probabilité d'obtenir un numéro pair sachant que l'on n'obtient pas un six dans le cas du dé truqué de l'exemple 3.*

Propriété 5. *On considère un espace probabilisé* (Ω, P) *et un événement* B *tel que* $P(B) \neq 0$, *alors l'application* $P_B : A \mapsto P_B(A)$ *est une probabilité sur* Ω.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 6. **Formule des probabilités composées**
On considère un espace probabilisé (Ω, P) *et deux événements* A *et* B *avec* $P(B) \neq 0$, *alors* $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

Démonstration. Exigible. □

Définition 7. *On considère un espace probabilisé* (Ω, P), *deux événements* A *et* B *sont dits* **indépendants** *si* $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque 3. *Deux événements* A *et* B *avec* $P(B) \neq 0$ *sont indépendants si et seulement si* $P_B(A) = P(A)$.

Exercice 9. *Les événements « obtenir un numéro pair » et « obtenir un multiple de trois » sont-ils des événements indépendants dans le cas du dé équilibré et du dé truqué de l'exemple 3 ?*

Définition 8. *On considère un espace probabilisé* (Ω, P), *des événements* $E_1, E_2 \dots E_n$ *sont dits*
- **deux à deux indépendants** *si pour tous* $i, j \in [\![1, n]\!]$ *distincts,* $P(E_i \cap E_j) = P(E_i) \times P(E_j)$.
- **mutuellements indépendants** *si pour tout* $p \in [\![2, n]\!]$ *et pour tous* $i_1, i_2, \dots, i_p \in [\![1, n]\!]$ *distincts,* $P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_p}) = P(E_{i_1}) \times P(E_{i_2}) \times \dots \times P(E_{i_p})$.

Exercice 10. *On lance deux fois successivement un dé cubique équilibré et on considère les événements suivants :*
E_1 *: « le résultat du premier lancer est pair »*
E_2 *: « le résultat du second lancer est pair »*
E_3 *: « la somme des résultats du premier et du second lancer est impaire »*
Les événements E_1, E_2 *et* E_3 *sont-ils deux à deux indépendants et/ou mutuellement indépendants ?*

Propriété 7. **Formule des probabilités totales**
On considère un espace probabilisé (Ω, P) *muni d'un système complet d'événements* $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ *de probabilités non nulles, alors pour tout événement* E *on a* $P(E) = P(E_1) \times P_{E_1}(E) + P(E_2) \times P_{E_2}(E) + \dots + P(E_n) \times P_{E_n}(E)$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 11. *Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage dans l'expérience de l'exercice 7.*

Propriété 8. **Formules de Bayes**
On considère un espace probabilisé (Ω, P) *muni d'un système complet d'événements* $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ *de probabilités non nulles et trois événements* A, B, E *de probabilités non nulles, alors* $P_B(A) = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$ *et* $P_E(E_i) = \dfrac{P_{E_i}(E) \times P(E_i)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} P(E_k) \times P_{E_k}(E)}$, $i \in [\![1, n]\!]$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 12. *Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage sachant que l'on a obtenu une boule rouge au second tirage dans l'expérience de l'exercice 7.*

2 Variables aléatoires

2.1 Notion de variables aléatoire

Définition 9. *Étant donné un univers Ω, on appelle* **variable aléatoire** *X sur Ω toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 4. *La somme des résultats obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé cubique est une variable aléatoire.*

Remarque 4. *Si φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $Y = \varphi \circ X$ est une variable aléatoire que l'on notera $\varphi(X)$.*

Définition 10. *On considère une variable aléatoire X sur un univers Ω, $x \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. On note $X \in A$ l'événement $X^{-1}(A)$, $X = x$ l'événement $X^{-1}(\{x\})$ et $X \leqslant x$ l'événement $X^{-1}(]-\infty; x])$.*

Exercice 13. *On note X la somme des résultats obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé cubique équilibré. Déterminer $P(X = 6)$ et $P(7 \leqslant X \leqslant 10)$.*

Définition 11. *On appelle* **loi de probabilité** *d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, P), l'application $P_X : \begin{array}{rcl} X(\Omega) & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & P(X = x) \end{array}$.*

Exercice 14. *Déterminer la loi de probabilité de la somme des résultats obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé cubique équilibré.*

Propriété 9. *P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.*

Démonstration. Exigible. □

Définition 12. *On appelle* **fonction de répartition** *d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, P), l'application $F_X : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & P(X \leqslant x) \end{array}$.*

Exercice 15. *Représenter graphiquement la fonction de répartition de la somme des résultats obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé cubique équilibré.*

Propriété 10. *On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) alors pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 < x_2$, $P(x_1 < X \leqslant x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$.*

Démonstration. Exigible. □

2.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire

Définition 13. *On appelle* **espérance** *d'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini, $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$. Une variable aléatoire X telle que $\mathrm{E}(X) = 0$ est dite* **centrée***.*

Exercice 16. *Calculer l'espérance de la somme des résultats obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé cubique équilibré.*

Propriété 11. *On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini, alors $\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.*

Démonstration. Exigible - on regroupe les issues ayant même image par X. □

Remarque 5. *L'espérance d'une variable aléatoire correspond à la moyenne pondérée de ses valeurs par leurs probabilités d'apparition.*

Propriété 12. **Linéarité de l'espérance**
On considère deux variables aléatoires X et Y sur un espace probabilisé (Ω, P) fini et deux réels λ et μ, alors $\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathrm{E}(X) + \mu \mathrm{E}(Y)$.

Démonstration. Hors-programme - on calcule l'espérance de $X + Y$ en utilisant la formule des probabilités totales. □

Exercice 17. *Utiliser la linéarité de l'espérance pour simplifier le calcul de l'exercice 16.*

Propriété 13. **Théorème de transfert**
On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini et une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $\mathrm{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) P(X = x)$.

Démonstration. Exigible - on remarque que $\varphi(X)(\Omega) = \varphi(X(\Omega))$. □

Exercice 18. *Calculer l'espérance de l'inverse de la somme des numéros obtenus lors du lancer de deux dés cubiques équilibrés.*

Définition 14. *On appelle* **variance** *d'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini,* $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$. *Une variable aléatoire X telle que $\mathrm{V}(X) = 1$ est dite* **réduite**.

On appelle **écart type** *d'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini, $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.*

Remarque 6. *La variance d'une variable aléatoire correspond à la moyenne pondérée du carré des écarts à l'espérance de ses valeurs par leurs probabilités d'apparition.*

Remarque 7. $\mathrm{V}(X) = 0 \iff X = \mathrm{E}(X)$.

Exercice 19. *Calculer la variance et l'écart type de la somme des résultats obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé cubique équilibré.*

Corollaire 1. *On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini et deux réels a et b alors* $\mathrm{V}(aX + b) = a^2 \mathrm{V}(X)$.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 14. **Formule de Koenig-Huygens**
On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini,
alors $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.

Démonstration. Exigible - on utilise la linéarité de l'espérance. □

Exercice 20. *Vérifier la formule de Koenig-Huygens pour la variable aléatoire de l'exercice 19.*

Propriété 15. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**
On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini et $a \in]0; +\infty[$, alors $P\left(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{\mathrm{V}(X)}{a^2}$.

Démonstration. Exigible - on minore la variance en utilisant le théorème de transfert et en considérant $x \in X(\Omega)$ tel que $|x - \mathrm{E}(X)| \geqslant a$. □

2.3 Lois de probabilités usuelles

Définition 15. *On dit qu'une variable aléatoire X sur un univers probabilisé (Ω, P) suit une* **loi certaine** *si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$.*

Remarque 8. *Si X suit une loi certaine, $\mathrm{E}(X) = a$ et $\mathrm{V}(X) = 0$.*

Définition 16. *On dit qu'une variable aléatoire X sur un univers probabilisé (Ω, P) suit une* **loi uniforme** *si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P(X = a_k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$.*

Exemple 5. *Le résultat du lancer d'un dé cubique équilibré suit une loi uniforme.*

Lemme 1. *On considère $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.*

Démonstration. Exigible - on procède par télescopage en remarquant que $k = \frac{1}{2}\left[(k+1)^2 - k^2 - 1\right]$ et $k^2 = \frac{1}{3}\left[(k+1)^3 - k^3 - 3k - 1\right]$. □

Propriété 16. $\boxed{\text{On considère une variable aléatoire } X \text{ sur un univers probabilisé } (\Omega, P) \text{ telle que } P(X = k) = \dfrac{1}{n} \text{ pour tout } k \in [\![1; n]\!] \text{ alors } \mathrm{E}(X) = \dfrac{n+1}{2} \text{ et } \mathrm{V}(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}.}$

Démonstration. Exigible - on utilise le lemme 1 et la formule de Koenig-Huygens. □

Définition 17. *On dit qu'une variable aléatoire X sur un univers probabilisé (Ω, P) suit une* **loi de Bernoulli de paramètre p** *notée $\mathcal{B}(p)$ si il existe $p \in [0; 1]$ tel que $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.*

Remarque 9. *On note parfois $q = 1 - p$.*

Exemple 6. *Le nombre de Pile obtenus lors du lancer d'une pièce équilibrée suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.*

Propriété 17. $\boxed{\text{On considère une variable aléatoire } X \text{ sur un univers probabilisé suivant une loi de Bernoulli de paramètre } p \text{ alors } \mathrm{E}(X) = p \text{ et } \mathrm{V}(X) = p(1-p).}$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 21. *On lance n fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité d'obtenir k fois pile, $k \in [\![0; n]\!]$.*

Définition 18. *On dit qu'une variable aléatoire X sur un univers probabilisé (Ω, P) suit une* **loi binomiale de paramètres n et p** *notée $\mathcal{B}(n, p)$ si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$ tels que $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$.*

Remarque 10. *Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} P(X = k) = 1$.*

Exemple 7. *Le nombre de Pile obtenus lors de n lancers successifs d'une pièce équilibrée suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.*

Exercice 22. *On lance n fois une pièce équilibrée. Calculer le nombre moyen de piles obtenus.*

Propriété 18. $\boxed{\text{On considère une variable aléatoire } X \text{ sur un univers probabilisé suivant une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p \text{ alors } \mathrm{E}(X) = np \text{ et } \mathrm{V}(X) = np(1-p).}$

Démonstration. Non exigible - on remarque que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ puis on utilise la formule de Koenig-Huygens en remarquant que $k^2\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2} + n\binom{n-1}{k-1}$. □