II. Nombres complexes

1 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

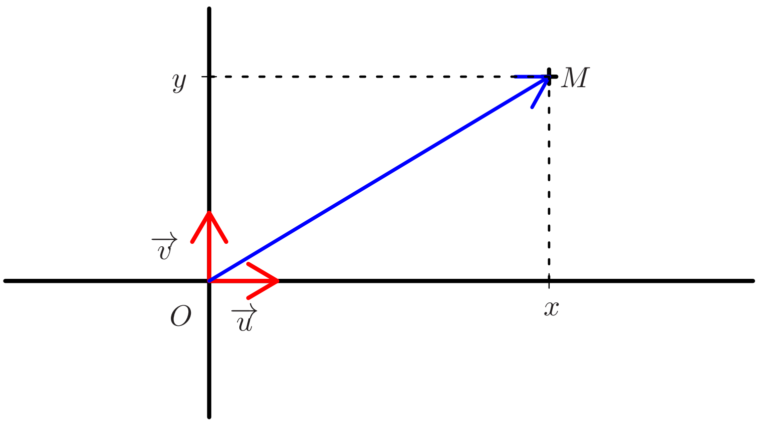
Théorème 1. *Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ des* **nombres complexes** *qui possède les propriétés suivantes :*
- *$\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.*
- *tout nombre complexe z admet une unique écriture sous la forme $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, cette écriture est appelée* **forme algébrique** *du nombre z, le réel x est la* **partie réelle** *du nombre z notée $\mathcal{R}e(z)$ et le réel y est la* **partie imaginaire** *du nombre z notée $\mathcal{I}m(z)$. Si $y = 0$ le nombre z est dit* **réel** *et si $x = 0$ le nombre z est dit* **imaginaire pur**.

Démonstration. Non exigible. □

Exercice 1. *Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = 3 - (2 + i)(1 - 3i)$.*

Définition 1. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ on représente le nombre complexe $z = x + iy$ par :*
- *Le point $M(x; y)$.*
- *Le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$*

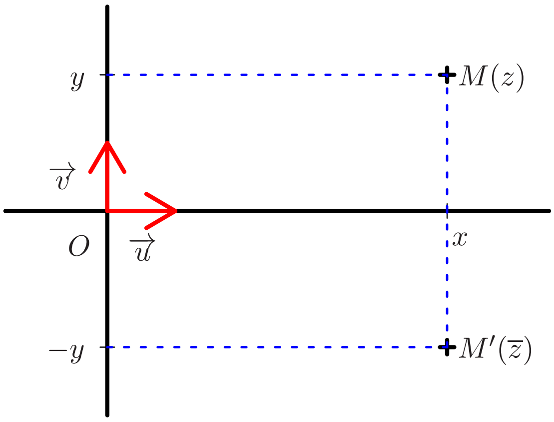
Le plan est alors appelé **plan complexe***, l'axe des abscisses est appelé* **axe des réels** *et l'axe des ordonnées* **axe des imaginaires purs***, le nombre complexe z est appelé* **affixe** *du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.*



Exercice 2. *Représenter dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = -1 - 4i$, $z_C = -3i$ et $z_D = -7$. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

Définition 2. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, on appelle* **nombre complexe conjugué** *de z le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.*

Propriété 1. *Soit z un nombre complexe, les points M et M' du plan complexe d'affixes respectives z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.*



Démonstration. Exigible. □

Exercice 3. *Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{3-i}{1+2i}$. (on pourra multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur)*

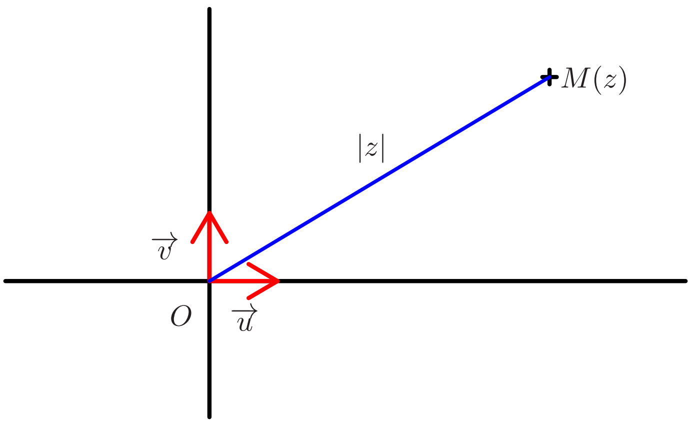
Propriété 2. *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a :*

- $\boxed{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$
- $\boxed{\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}}$
- $\boxed{\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}}$
- *pour* $z_2 \neq 0$, $\boxed{\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}$

Démonstration. Exigible. □

Définition 3. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, on appelle* **module** *de z le nombre réel $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Propriété 3. *Soit z un nombre complexe et M son point image dans le plan complexe alors $OM = |z|$.*



Démonstration. Exigible. □

Exercice 4. *Dans le plan complexe, on considère deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B. Interpréter géométriquement $|z_B - z_A|$.*

Propriété 4. *Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a :*

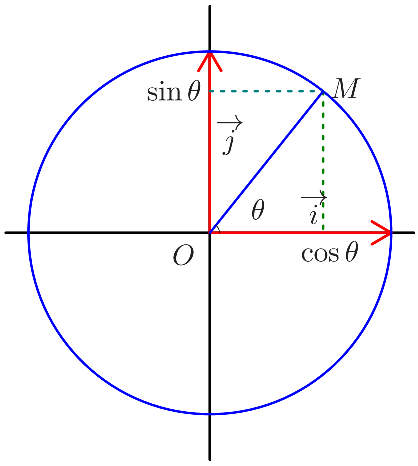
- $\boxed{z\overline{z} = |z|^2}$
- $\boxed{|\overline{z}| = |z|}$
- $\boxed{|-z| = |z|}$
- $\boxed{|z| = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad z = 0}$
- $\boxed{|z_1 z_2| = |z_1||z_2|}$
- *pour* $z \neq 0$, $\boxed{\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}}$
- *pour* $z_2 \neq 0$, $\boxed{\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}}$
- $\boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$ *(inégalité triangulaire)*

Démonstration. Exigible - Pour la compatibilité avec le produit, on utilise $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ et pour la preuve de l'inégalité triangulaire, on remarque que $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathcal{R}e(z_1\overline{z_2})$. □

2 Écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

2.1 Trigonométrie

Définition 4. *Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère un point M du cercle de centre O et de rayon 1 et on note $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$. La fonction de $\mathbb{R}$ dans $[-1; 1]$ qui à θ associe l'abscisse du point M est appelée fonction* **cosinus** *et est notée* cos *et la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[-1; 1]$ qui à θ associe l'ordonnée du point M est appelée fonction* **sinus** *et est notée* sin.



Propriété 5.

- *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques :*

$$\textit{pour tout } x \in \mathbb{R}, \textit{ on a } \boxed{\begin{array}{rcl} \cos(x + 2\pi) & = & \cos(x) \\ \sin(x + 2\pi) & = & \sin(x) \end{array}}$$

- *La fonction cosinus est* **paire** *et la fonction sinus est* **impaire** *:*

$$\textit{pour tout } x \in \mathbb{R}, \textit{ on a } \boxed{\begin{array}{rcl} \cos(-x) & = & \cos(x) \\ \sin(-x) & = & -\sin(x) \end{array}}$$

Démonstration. Exigible. □

Propriété 6. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a* $\boxed{(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1}$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 5. *Exprimer* $\cos(x + \pi)$, $\sin(x + \pi)$, $\cos(x + \frac{\pi}{2})$, $\sin(x + \frac{\pi}{2})$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ *et* $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$ *en fonction de* $\cos x$ *et* $\sin x$ *en utilisant des symétries sur le cercle trigonométrique.*

Propriété 7. Valeurs remarquables du cosinus et du sinus

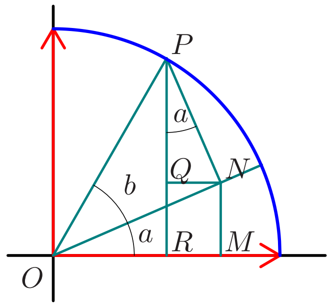
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Démonstration. Exigible. □

Propriété 8. *Soient a et b des nombres réels, alors :*

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b} \qquad \boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

Démonstration. Non exigible - On exprime sur la figure ci-contre les longueurs ON et PN en fonction de $\cos b$ et $\sin b$.
On en déduit les longueurs OM, QN puis OR ainsi que les longueurs PQ, MN et PR.



□

Corollaire 1. *Soit x un nombre réel, alors :*

$$\boxed{\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1 = 1 - 2(\sin x)^2} \qquad \boxed{\sin(2x) = 2 \sin x \cos x}$$

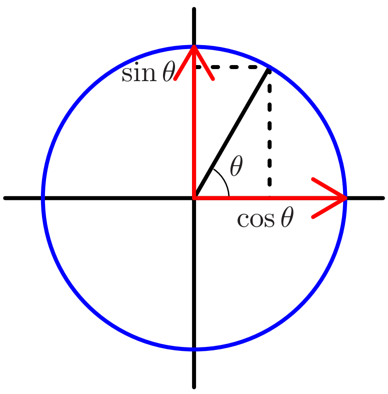
Démonstration. Exigible. □

Exercice 6. *Exprimer $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$.*

Exercice 7. *Factoriser $\cos p + \cos q$ en posant $p = a+b$ et $q = a-b$.*

2.2 Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Propriété 9. *Tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme $\cos\theta + i \sin\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, θ étant défini de manière unique à 2π près.*



Démonstration. Exigible - On remarque qu'un point d'affixe de module 1 appartient au cercle trigonométrique. □

Propriété 10. *On note* $z_\theta = \cos\theta + i\sin\theta$ *pour* $\theta \in \mathbb{R}$*, alors* $\overline{z_\theta} = z_{-\theta} = \dfrac{1}{z_\theta}$ *et pour tous* α *et* β *appartenant à* $\mathbb{R}$ *on a* $z_\alpha z_\beta = z_{\alpha+\beta}$*.*

Démonstration. Exigible. □

Définition 5. *Par analogie avec l'exponentielle réelle, on note désormais* $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ *pour* $\theta \in \mathbb{R}$*.*

Exercice 8. *Calculer* $e^{i\pi}$ *(formule d'Euler), calculer* $e^{in\pi}$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Propriété 11. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*, alors :*

- $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ $\boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$ *(formules d'Euler)*
- $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$ *(formule de Moivre)*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 9. *Montrer en utilisant les formules d'Euler que* $(\cos x)^2 = \dfrac{\cos(2x) + 1}{2}$*.*

Exercice 10. *Montrer en utilisant la formule de Moivre que* $\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$*.*

Propriété 12. *formulaire de trigonométrie*

- $\boxed{\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b}$
  $\boxed{\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b}$
  (ces formules se retrouvent à partir de l'égalité $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$*)*
- $\boxed{\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1 = 1 - 2(\sin x)^2}$
  $\boxed{\sin(2x) = 2\sin x\cos x}$
  (ces formules se retrouvent à partir de l'égalité $\left(e^{ix}\right)^2 = e^{2ix}$*)*

Démonstration. Exigible. □

2.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

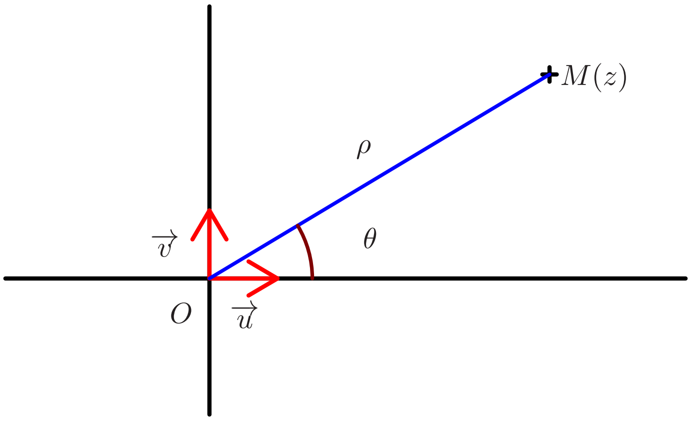
Propriété 13. *Tout nombre complexe* $z = x + iy$ *non nul peut s'écrire de manière unique sous la* **forme trigonométrique** $z = \rho e^{i\theta}$ *avec* ρ *un réel strictement positif et* θ *un réel défini à* 2π *près. De plus on a :*

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Le réel θ *est appelé* **argument** *du nombre complexe* z *et noté* $\arg(z)$*.*

Démonstration. Exigible - On considère le nombre complexe $\dfrac{z}{|z|}$. □

Propriété 14. *Soit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre complexe et M son point image dans le plan complexe alors le couple (ρ, θ) représente les coordonnées polaires du point M.*



Exercice 11. *On considère le nombre complexe $z = 1 + i$. Écrire z sous forme trigonométrique, en déduire la forme algébrique de z^{100}.*

Exercice 12. *On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique, en déduire les modules et arguments de $z_1 \times z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.*

Propriété 15. *Soient z, z_1 et z_2 trois nombres complexes non nuls, alors :*

- $\boxed{\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg(z^n) = n \times \arg(z)\ [2\pi] \quad , \quad n \in \mathbb{Z}}$

Démonstration. Exigible - On utilise la forme trigonométrique. □

2.4 Racines n-ièmes de l'unité

Propriété 16. *L'équation $z^n = 1$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ admet n solutions appelées* **racines n-ièmes de l'unité** *et s'exprimant sous la forme $\boxed{z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*

On note $\mathbb{U}_n = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Démonstration. Exigible - On utilise la forme trigonométrique. □

Exercice 13. *Déterminer sous forme algébrique les racines cubiques de l'unité et les représenter dans le plan complexe.*

Propriété 17. *L'équation $z^n = a$ avec $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ admet n solutions s'exprimant sous la forme $\boxed{z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}}}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ où $r = |a|$ et $\alpha = \arg(a)$.*

Démonstration. Exigible - On utilise la forme trigonométrique. □

Exercice 14. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8i$ puis l'équation $z^4 = -16$.*

2.5 Exponentielle complexe

Définition 6. *On appelle* **exponentielle complexe** *d'un nombre complexe* $z = x + iy$ *avec* x *et* y *réels* $\boxed{e^z = e^x e^{iy}}$.

Remarque 1. *Cette définition est compatible avec l'exponentielle d'un réel et l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur et conserve de nombreuses propriétés.*

Propriété 18. *Soit* z, z_1 *et* z_2 *des nombres complexes et* n *un entier relatif, alors :*

- $\boxed{e^z \neq 0}$
- $\boxed{e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}}$
- $\boxed{e^{\overline{z}} = \overline{e^z}}$
- $\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}}$
- $\boxed{e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}}$
- $\boxed{(e^z)^n = e^{nz}}$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 15. *Déterminer la forme algébrique de* $e^{i-\sqrt{3}}$.

3 Équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

3.1 Racines carrées d'un nombre complexe non nul

Définition 7. *On appelle* **racine carrée** *d'un nombre complexe* z*, un nombre complexe dont le carré est égal à* z*.*

Remarque 2. *Dans le cas où le nombre est réel, cette définition est incompatible avec celle de la fonction racine carrée.*

Propriété 19. *Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.*

Démonstration. Exigible - On utilise les écritures trigonométriques. □

Exercice 16. *Déterminer les racines carrées du nombre complexe* $5 + 12i$.

3.2 Résolution des équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Théorème 2. *Étant donnés trois nombres complexes* a, b, c *avec* $a \neq 0$*, l'équation* $az^2 + bz + c = 0$ *de discriminant* $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ *admet :*

- *Si* $\Delta = 0$*, une solution complexe* $\boxed{z_0 = \dfrac{-b}{2a}}$ *de plus* $\boxed{az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2}$.
- *Si* $\Delta \neq 0$*, deux solutions complexes* $\boxed{z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}}$ *et* $\boxed{z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}}$ *avec* $\boxed{\delta^2 = \Delta}$

  de plus $\boxed{az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)}$.

Démonstration. Exigible - On utilise la forme canonique d'un trinôme du second degré. □

Exercice 17. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2 + (1 + 6i)z - 10 = 0$.

Remarque 3. *Les solutions de l'équation précédente ne sont pas conjuguées.*