XI. Limites

1 Limite d'une fonction

Définition 1. *On dit qu'un fonction de variable réelle à valeur réelles est définie au* **voisinage** *de $a \in \mathbb{R}$ si il existe un réel $\delta > 0$ tel que f soit définie sur $]a; a+\delta[$, sur $]a-\delta; a[$ ou sur $]a-\delta, a+\delta[$.*

Exercice 1. *Montrer que la fonction $\ln$ est définie au voisinage de 1 et au voisinage de 0.*

Définition 2. *On dit qu'une fonction de variable réelle à valeur réelles est définie au voisinage de $+\infty$ si il existe un réel M tel que f soit définie sur $]M; +\infty[$ et on dit que f est définie au voisinage de $-\infty$ si il existe un réel M tel que f soit définie sur $]-\infty; M[$*

Exercice 2. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2-3)$ est définie au voisinage de $+\infty$.*

Définition 3. **Limite finie en une valeur finie**
On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, on dit que :
- *f admet une* **limite** *$l \in \mathbb{R}$ en a si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ avec $|x-a| \leqslant \delta$ on a $|f(x)-l| \leqslant \epsilon$, on note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.*
- *f admet une* **limite** *$l \in \mathbb{R}$* **à gauche** *en a si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ avec $|x-a| \leqslant \delta$ et $x < a$ on a $|f(x)-l| \leqslant \epsilon$, on note alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = l$.*
- *f admet une* **limite** *$l \in \mathbb{R}$* **à droite** *en a si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ avec $|x-a| \leqslant \delta$ et $x > a$ on a $|f(x)-l| \leqslant \epsilon$, on note alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = l$.*

Propriété 1. *Si une fonction admet une limite finie alors celle-ci est nécessairement unique.*

Démonstration. Exigible - On raisonne par l'absurde en posant $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{|l_2-l_1|}{3}$ et $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. □

Remarque 1. *Si f admet une limite l en a elle admet* a fortiori *une limite l à gauche en a et une limite l à droite en a.*

Contre-exemple 1. *La fonction* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{lll} 0 & si & x \neq 0 \\ 1 & si & x = 0 \end{array}\right. \end{array}$ *admet une limite à gauche et à droite en* 0 *mais n'admet pas de limite en* 0.

Remarque 2. *Une fonction f tend vers l en a si et seulement si la fonction $f-l$ tend vers 0 en a.*

Propriété 2. *Si une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ admet une limite en $a \in I$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Démonstration. Exigible - On montre que $|f(a)-l| \leqslant \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. □

Propriété 3. *Une fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 3. *Montrer que toute fonction admettant une limite finie strictement positive en a est minorée par un nombre strictement positif au voisinage de a.*

Définition 4. Limite infinie en une valeur finie
On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, on dit que :
- *f tend vers $+\infty$ en a si pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ avec $|x-a| \leqslant \delta$ on a $f(x) \geqslant M$, on note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.*
- *f tend vers $-\infty$ en a si pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ avec $|x-a| \leqslant \delta$ on a $f(x) \leqslant M$, on note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.*

Remarque 3. *On peut également définir les limites infinies à gauche ou a droite de a.*

Remarque 4. *Une fonction f tend vers $+\infty$ en a si et seulement si la fonction $-f$ tend vers $-\infty$ en a.*

Exercice 4. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ tend vers $+\infty$ en 0 à droite et à gauche.*

Définition 5. Limite finie en l'infini
On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ définie au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que :
- *f tend vers l en $+\infty$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ avec $x \geqslant M$ on a $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$, on note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$.*
- *f tend vers l en $-\infty$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ avec $x \leqslant M$ on a $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$, on note alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.*

Définition 6. Limite infinie en l'infini
On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ définie au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que :
- *f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ avec $x \geqslant N$ on a $f(x) \geqslant M$, on note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*
- *f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ avec $x \geqslant N$ on a $f(x) \leqslant M$, on note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.*

Exercice 5. *Donner la définition d'une fonction f tendant vers $-\infty$ en $-\infty$.*

2 Opérations sur les limites, comparaison des limites

Propriété 4. Limites et opérations
On considère deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, alors :
- *la fonction $f + g$ admet $l_1 + l_2$ pour limite en a.*
- *la fonction $f \times g$ admet $l_1 \times l_2$ pour limite en a.*

Démonstration. Non exigible - On remarque que $|[f(x) + g(x)] - [l_1 + l_2]| \leqslant |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2|$ et $|f(x)g(x) - l_1 l_2| \leqslant |[f(x) - l_1]g(x)| + |l_1[g(x) - l_2]|$. □

Remarque 5. *On peut étendre la propriété à la différence et au quotient si la fonction au dénominateur ne s'annule pas et si sa limite est non nulle.*

On admet que comme pour les suites, on peut démontrer les autres propriétés des opérations sur les limites.

Exercice 6. *Résumer dans des tableaux les propriétés des opérations sur les limites.*

Propriété 5. **Composition de limites**
On considère deux fonctions $f \in \mathcal{F}(I,J)$ et $g \in \mathcal{F}(J,\mathbb{R})$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = l \in \mathbb{R}$ alors la fonction $g \circ f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ admet l pour limite en a.

Démonstration. Non exigible. □

Exercice 7. *Déterminer la limite de la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2+1)$ en 0.*

Propriété 6. **Image d'une suite par une fonction**
On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et admettant une limite en a ainsi qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I qui converge vers a alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Démonstration. Non exigible. □

Exercice 8. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.*

Propriété 7. **Comparaison de limites**
On considère deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$ alors $l_1 \leqslant l_2$.

Démonstration. Non exigible - On raisonne par l'absurde en posant $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{l_1 - l_2}{3}$ et $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. □

Exercice 9. *La propriété est-elle encore vérifiée si on remplace les inégalités par des inégalités strictes ?*

3 Théorèmes d'existence de limites

Théorème 1. **Théorème d'encadrement**
On considère trois fonctions $f, g, h \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors :

- *si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ pour tout $x \in I$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.*
- *si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.*
- *si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 10. *Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.*

Théorème 2. **Théorème de la limite monotone**
On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ croissante *définie au voisinage de $+\infty$, alors :*

- *si la fonction f n'est pas majorée on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*
- *si la fonction f est majorée on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ avec l plus petit majorant (borne supérieure) de f sur I.*

Démonstration. Hors-programme. □

Remarque 6. *Ce théorème peut s'étendre aux fonctions décroissantes et à une limite en $-\infty$.*

4 Continuité d'une fonction

Définition 7. *Une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ admettant une limite finie en $a \in I$ est dite* **continue** *en a, on a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Une fonction continue en tout point de I est dite continue sur I, on note $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur I.*

Remarque 7. *Une fonction dont la représentation graphique peut se tracer sans lever le crayon est continue.*

Exemple 1. *On admet que les fonctions usuelles (fonctions puissances, exponentielles, logarithmes, circulaires) sont continues sur leurs intervalles de définition.*

Exercice 11. *Les fonctions valeur absolue et partie entière sont-elles continues sur $\mathbb{R}$?*

Définition 8. *Une fonction f à valeurs réelles définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ mais pas en a et admettant des limites finies à gauche et à droite en a égales peut se prolonger en une fonction $\tilde{f}$ continue en a appelée* **prolongement par continuité** *de la fonction f définie par* $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } x \neq a \end{cases}$.

Exercice 12. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ peut se prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$.*

Propriété 8. **Continuité et opérations**
On considère deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, alors les fonctions $f+g$ et $f\times g$ sont continues sur I.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 8. *On peut étendre la propriété à la différence et au quotient si la fonction au dénominateur ne s'annule pas.*

Exercice 13. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - \sin x}{e^x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

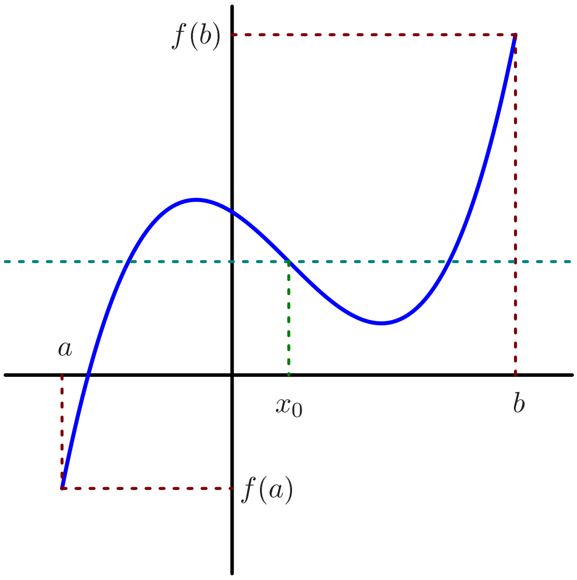
Propriété 9. **Composition de fonctions continues**
On considère deux fonctions $f \in \mathcal{C}(I,J)$ et $g \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 14. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{e^x - x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

5 Propriétés des fonctions continues

Théorème 3. Théorème des valeurs intermédiaires
On considère une fonction f à valeurs réelles continue *sur $[a, b]$, alors pour tout réel $y \in \overleftrightarrow{[f(a), f(b)]}$ il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y$.*



Démonstration. Hors-programme - On considère la borne supérieure de l'ensemble $\{x \in [a, b] / f(x) \leqslant y\}$. □

Remarque 9. *On en déduit qu'une fonction f à valeurs réelles* continue *sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[a, b]$.*

Exercice 15. *Montrer que l'équation $x^5 = 5(x - 1)$ admet une unique solution réelle et en donner un encadrement à l'unité.*

Propriété 10. *L'image directe d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle, l'image directe d'un segment par une fonction continue à valeurs réelles est un segment.*

Démonstration. Hors-programme. □

Exercice 16. *Déterminer l'image directe de l'intervalle $]-1; 2]$ puis du segment $[-1; 2]$ par la fonction carré.*

Théorème 4. Théorème de la bijection
Une fonction à valeurs réelles continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I dans $f(I)$, son application réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$ de même sens de variation que f.

Démonstration. Hors-programme. □

Exercice 17. *Montrer que la fonction cosinus est bijective de $[-\pi; 0]$ dans $[-1; 1]$ et préciser son application réciproque.*

6 Relations de comparaison

Définition 9. *On considère deux fonctions à valeurs réelles f et g définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, on dit que :*

- *la fonction f est* **dominée** *par la fonction g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{=} O(g)$ s'il existe une fonction α définie au voisinage de a telle que $f = \alpha g$ avec α bornée.*
- *la fonction f est* **négligeable** *devant la fonction g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{=} o(g)$ s'il existe une fonction α définie au voisinage de a telle que $f = \alpha g$ avec $\lim\limits_{x \to a} \alpha = 0$.*
- *la fonction f est* **équivalente** *à la fonction g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ s'il existe une fonction α définie au voisinage de a telle que $f = \alpha g$ avec $\lim\limits_{x \to a} \alpha = 1$.*

Remarque 10. *On définit de la même façon les relations de comparaison au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.*

Remarque 11. *Si la fonction g ne s'annule pas, ceci revient à dire que la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée, tend vers 0 ou tend vers 1 en a.*

Remarque 12. *Si $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} O(g)$.*

Remarque 13. *$f \underset{a}{\sim} g$ équivaut à $f - g \underset{a}{=} o(g)$.*

Exemple 2. *$x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$, $x^2 \underset{0}{=} o(x)$ et $x \underset{1}{\sim} x^2$.*

Exercice 18. *Que signifie pour une fonction f à valeurs réelles que $f \underset{a}{=} o(0)$, que $f \underset{a}{=} o(1)$, que $f \underset{a}{=} O(1)$ ou que $f \underset{a}{\sim} l$ avec $l \in \mathbb{R}$?*

Exercice 19. *Montrer que si $f \underset{a}{\sim} g$ alors les fonctions à valeurs réelles f et g ont même signe au voisinage de a.*

Propriété 11. *On considère trois fonctions f, g et h à valeurs réelles définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$:*

- *si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$. (symétrie)*
- *si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$. (transitivité)*

Démonstration. Exigible. □

Remarque 14. *La propriété reste valable au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.*

Propriété 12. **Équivalent d'un produit et d'un quotient**
On considère quatre fonctions f_1, f_2, g_1 et g_2 à valeurs réelles définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ avec $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$ et $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$ si les fonctions f_2 et g_2 ne s'annulent pas.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 15. *La propriété reste valable au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.*

Exercice 20. *Déterminer la limite de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$ en $+\infty$ en utilisant les équivalents.*

Exercice 21. *Peut-on étendre la propriété à la somme ou à la différence de deux fonctions ?*

Propriété 13. **Comparaison des fonctions usuelles**

- $\boxed{\text{Si } a \in \mathbb{R}_+^* \text{ , } \ln x \underset{+\infty}{=} o(x^a)}$
- $\boxed{\text{Si } a \in \mathbb{R}_+^* \text{ , } x^a \underset{+\infty}{=} o(e^x)}$

Démonstration. Exigible - On utilise les croissances comparées des fonctions usuelles (Chap III). □