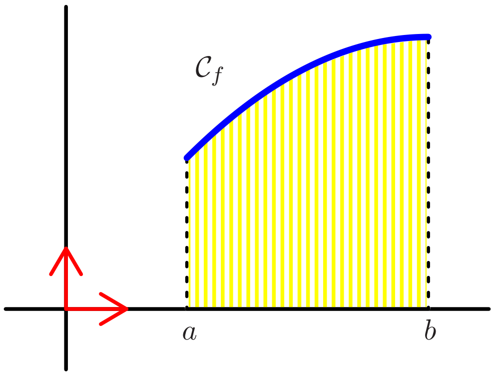
# XV. Intégration

## 1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

**Définition 1.**




*Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Le plan est muni d'un repère orthogonal. L'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelée* **intégrale** *de la fonction $f$ entre $a$ et $b$ et est notée :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Remarque 1.** $\displaystyle\int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0$ *et* $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

**Remarque 2.** *Une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ est nulle si et seulement si son intégrale entre $a$ et $b$ est nulle.*

**Exercice 1.** *Calculer* $\displaystyle\int_2^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

**Définition 2.** *Pour une fonction $f$ continue négative sur un intervalle $[a;b]$ on appelle intégrale de la fonction $f$ entre $a$ et $b$ l'opposé de l'intégrale de la fonction $-f$ entre $a$ et $b$. Pour une fonction $f$ continue sur un intervalle $[a;b]$ on appelle intégrale de la fonction $f$ entre $a$ et $b$ la somme des intégrales de la fonction $f$ sur les intervalles où $f$ est de signe constant.*

**Exercice 2.** *Calculer* $\displaystyle\int_{-2}^3 (x-1)\,\mathrm{d}x$.

**Définition 3.** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On appelle* **valeur moyenne** *de la fonction $f$ sur l'intervalle $[a;b]$ :*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Remarque 3.** *La valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a;b]$ correspond à la valeur d'une fonction contante de même intégrale entre $a$ et $b$.*

**Propriété 1. Croissance de l'intégrale**

*On considère deux fonctions $f$ et $g$ continues sur $[a;b]$ avec $f \leqslant g$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

*Démonstration.* Non exigible - On subdivise l'intervalle $[a;b]$ en des intervalles sur lesquels $f$ et $g$ sont de signes constants. $\square$

**Propriété 2.** **Inégalité triangulaire**

*On considère une fonction $f$ continue sur $[a;b]$, alors* $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

*Démonstration.* Exigible - On remarque que $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. □

**Exercice 3.** *Interpréter géométriquement l'inégalité triangulaire.*

**Propriété 3.** **Linéarité de l'intégrale**

*On considère $f, g \in \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors* $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \,+ \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

*Démonstration.* Hors-programme - on utilise un encadrement de $f$ et $g$ par des fonctions en escalier. □

**Propriété 4.** **Relation de Chasles**

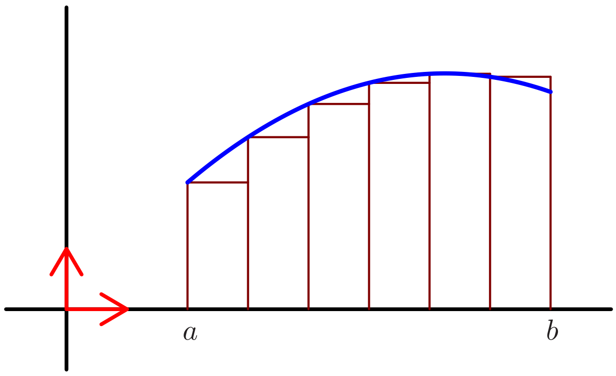
*On considère une fonction $f$ continue sur $[a;c]$ et $b \in [a;c]$, alors* $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

*Démonstration.* Exigible. □

**Remarque 4.** *On peut utiliser la relation de Chasles pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ entre $b$ et $a$ par* $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *les propriétés de l'intégrale vues précédemment demeurent valables à l'exception de celles faisant intervenir l'ordre en particulier l'inégalité triangulaire.*

**Propriété 5.** **Sommes de Riemann**

*Si $f$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ alors* $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.




*Démonstration.* Non exigible - on interprète géométriquement les sommes de Riemann. □

**Remarque 5.** *La propriété demeure valable en considérant la somme* $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

**Exercice 4.** *Calculer* $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ *en utilisant les sommes de Riemann.*

**Exercice 5.** *Montrer que* $\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{k=n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *en approchant l'intégrale de $f$ au moyen de trapèzes.*

## 2 Calcul intégral

**Définition 4.** *On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, une fonction $F \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ telle que $F' = f$ est appelée une* **primitive** *de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$.*

**Exercice 6.** *Montrer que la fonction* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x \neq 0 \end{cases} \end{array}$ *n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.*

**Propriété 6.** *Si $F_1$ et $F_2$ sont deux primitives d'une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ alors il existe un réel $k$ tel que $F_2 = F_1 + k$.*

*Démonstration.* Exigible - On remarque que $(F_2 - F_1)' = 0$. □

**Théorème 1.** **Théorème fondamental de l'analyse**
*On considère une fonction $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et $x_0, a, b \in I$ :*
- *La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de $f$ sur $I$ s'annulant en $x_0$.*
- *Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)$.*

*Démonstration.* Non exigible - On utilise le taux d'accroissement et on procède par encadrement. □

**Exercice 7.** *Calculer l'aire du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction inverse ainsi que les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.*

**Corollaire 1.** *Si $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.*

*Démonstration.* Exigible. □

**Propriété 7.** **Intégration par parties**
*Si $u, v \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$.*

*Démonstration.* Exigible. □

**Exercice 8.** *Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \,\mathrm{d}t$.*

**Exercice 9.** *Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$.*

**Propriété 8.** **Changement de variable**
*Si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$ et $\begin{array}{c} a, b \in J \\ \varphi(J) \subset I \end{array}$ alors $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.*

*Démonstration.* Exigible - On considère la fonction $F \circ \varphi$ où $F$ est une primitive de $f$. □

**Remarque 6.** *En pratique, on note $x = \varphi(t)$ et $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.*

**Exercice 10.** *Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$ puis interpréter graphiquement. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \cos t$)*

**Exercice 11.** *Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 (\sin t)^3 \,\mathrm{d}t$. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \cos t$)*

**Corollaire 2.** *On considère $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a,b \in \mathbb{R}$ :*

- *si $f$ est impaire alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$.
- *si $f$ est paire alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t$.
- *si $f$ est $T$-périodique alors* $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$.

*Démonstration.* Exigible. □

**Exercice 12.** *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos t)^3 \mathrm{d}t$. *(on pourra utiliser le changement de variable $t = \pi - x$)*

**Exercice 13.** *On considère $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $T$-périodique avec $a \in \mathbb{R}$, montrer que* $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{T} f(t)\mathrm{d}t$. *(on pourra utiliser la relation de Chasles)*

# 3 Développements limités

## 3.1 Formules de Taylor

**Propriété 9.** **Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral**
*On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ et $a,b \in I$ alors :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \mathrm{d}t$$

*Démonstration.* Non exigible - On procède par récurrence et on utilise une intégration par parties. □

**Corollaire 3.** **Inégalité de Taylor-Lagrange**
*On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ et $a,b \in I$ alors :*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\overleftrightarrow{[a;b]}} |f^{(n+1)}|$$

*Démonstration.* Exigible. □

**Exercice 14.** *Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle pour $a = 0$ et $b = x$. En déduire* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!}$.

**Corollaire 4.** **Formule de Taylor-Young**
*On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ et $a,x \in I$ alors :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

*Démonstration.* Exigible. □

**Exercice 15.** *Appliquer la formule de Taylor-Young à la fonction cosinus en zéro. En déduire* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

En fait, on peut énoncer une version plus forte de la propriété :

**Propriété 10.** **Formule de Taylor-Young**
*On considère $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $a, x \in I$ alors :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

*Démonstration.* Non exigible - Pour l'hérédité, on applique la formule à la fonction $f'$ puis on intègre. □

**Propriété 11.** **Développements limités usuels**

$$\begin{aligned}
e^x &\underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos x &\underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin x &\underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\frac{1}{1-x} &\underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &\underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &\underset{0}{=} 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\arctan x &\underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Exigible - le développement limité de arctan sera établi plus simplement en utilisant la propriété 13. □

## 3.2 Opérations sur les développements limités

**Définition 5.** *On dit qu'une fonction $f$ à valeurs réelles définie au voisinage de $a$ admet un* **développement limité** *d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a$ si $f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ avec $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.*

**Propriété 12.** *Si une fonction $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ en $a$ alors celui-ci est unique.*

*Démonstration.* Exigible - On remarque que $c_0 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$, $c_1 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-c_0}{x-a} \ldots$ □

**Exercice 16.** *Interpréter en termes de limites les coefficients du développement limité d'ordre $n$ en $0$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.*

**Corollaire 5.** *Si une fonction paire admet un développement limité d'ordre $n$ en $0$ alors les coefficients des termes de degré impair sont nuls, si une fonction impaire admet un développement limité d'ordre $n$ en $0$ alors les coefficients des termes de degré pair sont nuls.*

*Démonstration.* Exigible - On procède par unicité en comparant les développement limités de $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto \pm f(-x)$. □

On peut additionner et multiplier les développements limités :

**Exercice 17.** *Calculer le développement limité d'ordre* $4$ *en* $0$ *des fonctions* $x \mapsto \cos x + \sin x$ *et* $x \mapsto e^x \sin x$*.*

On peut déterminer le développement limité d'une composée :

**Exercice 18.** *Calculer le développement limité d'ordre* $3$ *en* $0$ *des fonctions* $x \mapsto e^{\sin x}$ *et* $x \mapsto e^{\cos x}$*.*

On peut déterminer le développement limité d'un inverse ou d'un quotient en utilisant le développement limité de $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ en $0$ :

**Exercice 19.** *Déterminer le développement limité d'ordre* $5$ *en* $0$ *de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$*, en déduire le développement limité d'ordre* $5$ *en* $0$ *de la fonction tangente.*

**Propriété 13. Développement limité d'une primitive**
*On considère une fonction* $f$ *définie sur un intervalle* $I$ *et admettant une primitive* $F$ *sur* $I$ *telle que* $f(x) \underset{a}{=} o((x-a)^n)$ *avec* $a \in I$ *alors* $F(x) \underset{a}{=} F(a) + o((x-a)^{n+1})$*.*

*Démonstration.* Non exigible - On applique l'égalité des accroissements finis à la fonction $F$. $\square$

**Exercice 20.** *Déterminer le développement limité d'ordre* $n$ *en* $0$ *de la fonction* $x \mapsto \ln(1-x)$*.*

**Exercice 21.** *Déterminer le développement limité d'ordre* $n$ *en* $0$ *de la fonction arctangente.*

**Contre-exemple 1.** *On considère la fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ x^3 \sin \dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \end{cases} \end{array}$.

1. *Montrer que* $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$*.*
2. *Montrer que* $f$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*.*
3. *Montrer que* $f'(x) \underset{0}{\neq} o(x)$*.*

Si $f$ est dérivable et admet un développement limité d'ordre $n$ en $a$ on ne peut donc pas affirmer que $f'$ admet un développement limité d'ordre $n-1$ en $a$, en revanche si on sait que $f'$ admet un développement limité d'ordre $n-1$ en $a$ alors on peut l'obtenir par dérivation du développement limité d'ordre $n$ de $f$ en $a$ d'après la propriété 13.