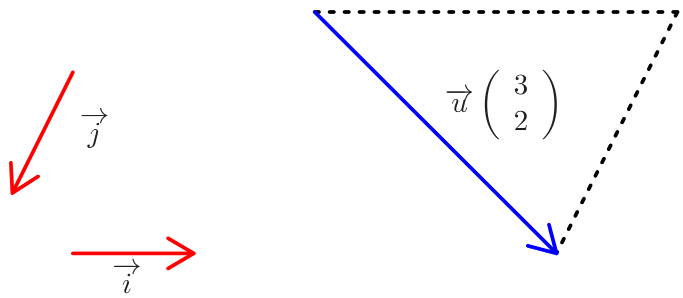
IV. Géométrie du plan

1 Repérage dans le plan

1.1 Repérage cartésien

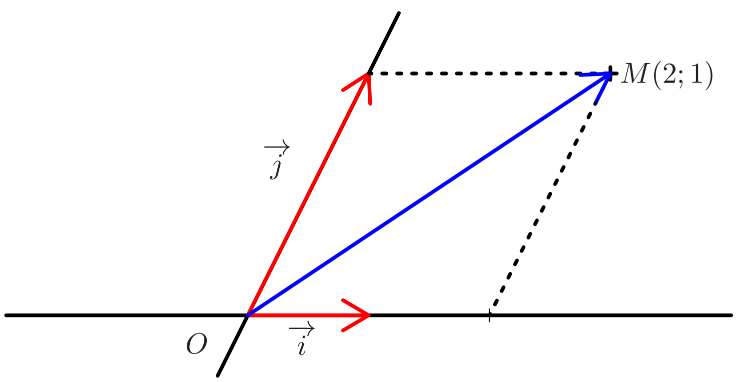
Définition 1. *On appelle* **base** *du plan un couple* $(\vec{i}, \vec{j})$ *avec* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *deux vecteurs non colinéaires du plan. Tout vecteur* $\vec{u}$ *du plan s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *sous la forme* $\vec{u} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j}$ *avec* λ *et* μ *des nombres réels. Les nombres* λ *et* μ *sont appelés* **coordonnées** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$*, le nombre* λ *est appelé* **abscisse** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$ *et le nombre* μ *est appelé* **ordonnée** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$*. On note* $\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$.



Remarque 1. *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$*, on a* $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1. *Le plan étant muni d'une base* $(\vec{i}, \vec{j})$*, on considère deux vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$*. Montrer que* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base du plan et déterminer les coordonnées des vecteurs* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *dans cette base.*

Définition 2. *On appelle* **repère cartésien** *du plan un triplet* $(O, \vec{i}, \vec{j})$*, avec* O *un point du plan et* $(\vec{i}, \vec{j})$ *une base du plan. Le point* O *est appelé* **origine** *du repère, la droite* $(O, \vec{i})$ *est appelée* **axe des abscisses** *et la droite* $(O, \vec{j})$ *est appelée* **axe des ordonnées***. Si les vecteurs* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *sont orthogonaux, le repère est dit* **orthogonal** *si de plus ils sont de même norme alors le repère est dit* **orthonormal***. Tout point* M *du plan est repéré de manière unique par deux nombres* x *et* y *tels que* $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$*. Les nombres* x *et* y *sont appelés* **coordonnées** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$*, le nombre* x *est appelé* **abscisse** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *et le nombre* y *est appelé* **ordonnée** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$*. On note* $M(x;y)$.



Exercice 2. *Le plan étant muni d'un repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$*, on considère deux vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *ainsi que deux points* $O'(1;2)$ *et* $M(3;4)$*. Montrer que* $(O', \vec{u}, \vec{v})$ *est un repère du plan et déterminer les coordonnées du point* M *dans celui-ci.*

1.2 Repérage polaire

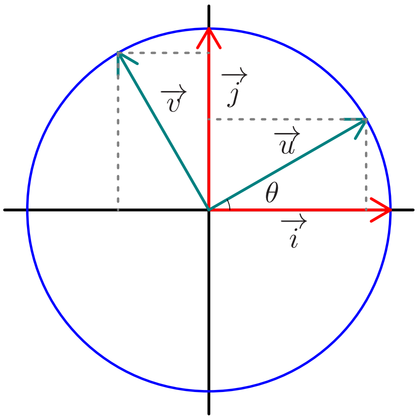
Propriété 1. *Dans le plan complexe, l'image d'un vecteur* $\vec{w}$ *d'affixe* $z_{\vec{w}}$ *par la rotation d'angle* θ *est le vecteur* $r_\theta(\vec{w})$ *d'affixe* $e^{i\theta} z_{\vec{w}}$*.*

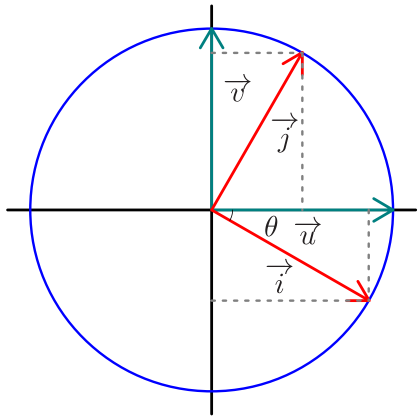
Démonstration. Exigible. □

Exercice 3. *Dans le plan muni d'une base orthonormale directe* $(\vec{i}, \vec{j})$*, on considère le vecteur* $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$*. Déterminer l'image de ce vecteur par une rotation d'angle* $-\dfrac{\pi}{6}$*.*

Corollaire 1. *Le plan étant muni d'une base orthonormale directe* $(\vec{i}, \vec{j})$*, on considère la base orthonormale* $(\vec{u}, \vec{v})$ *obtenue par rotation d'angle* θ *des vecteurs* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$*. On a :*

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j} \\ \vec{v} = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{i} = \cos\theta\ \vec{u} - \sin\theta\ \vec{v} \\ \vec{j} = \sin\theta\ \vec{u} + \cos\theta\ \vec{v} \end{cases}$$

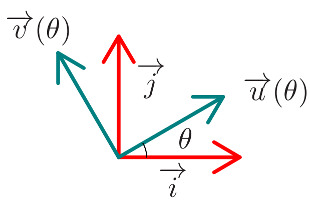




Démonstration. Exigible. □

Définition 3. *Le plan étant muni d'une base orthonormale directe* $(\vec{i}, \vec{j})$*, on définit pour* $\theta \in \mathbb{R}$ *la* **base polaire** $\left(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\right)$ *par :*

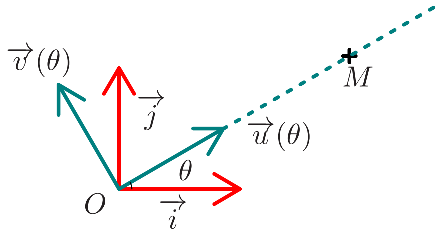
$$\boxed{\begin{array}{lllll} \vec{u}(\theta) & = r_\theta(\vec{i}) & = & \cos\theta\ \vec{i} & + \sin\theta\ \vec{j} \\ \vec{v}(\theta) & = r_\theta(\vec{j}) & = & -\sin\theta\ \vec{i} & + \cos\theta\ \vec{j} \end{array}}$$



Remarque 2. *Dans le plan complexe, les affixes des vecteurs* $\vec{u}(\theta)$ *et* $\vec{v}(\theta)$ *sont respectivement* $e^{i\theta}$ *et* $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = ie^{i\theta}$*.*

Propriété 2. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère un point $M(x; y)$, alors il existe deux réels ρ et θ tels que $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}(\theta)$. Les nombres ρ et θ sont appelés* **coordonnées polaires** *du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x & = & \rho\cos\theta \\ y & = & \rho\sin\theta \\ \rho & = & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}}$$



Démonstration. Exigible. □

Remarque 3. *Il n'y a pas unicité des coordonnées polaires.*

Remarque 4. *La base polaire $\left(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\right)$ est une base mobile car elle dépend du point M considéré.*

Exercice 4. *Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, déterminer les coordonnées polaires du point $M(-1; 1)$.*

2 Produit scalaire et déterminant dans le plan

2.1 Produit scalaire

Définition 4. *On appelle* **produit scalaire** *de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :*

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \left\{ \begin{array}{cc} ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) & si\ \vec{u} \neq \vec{0}\ et\ \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & si\ \vec{u} = \vec{0}\ ou\ \vec{v} = \vec{0} \end{array} \right.}$$

Remarque 5. *Le produit scalaire est symétrique car* $\boxed{\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}\,\vec{v}}$.

Remarque 6. *Le produit scalaire est nul si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.*

Propriété 3. *On considère trois points A, B et C non alignés du plan et on note H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = \pm AH \times AC$.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 4. *On considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ du plan complexe, alors :*

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

Démonstration. Non exigible - On note $z_{\vec{u}} = ||\vec{u}||e^{i\alpha}$ et $z_{\vec{v}} = ||\vec{v}||e^{i\beta}$ et on remarque que $\vec{u}.\vec{v} = \mathcal{R}e(\overline{z_{\vec{u}}}z_{\vec{v}})$. □

Remarque 7. *Cette propriété n'est valide que si le plan est muni d'une base orthonormale.*

Exercice 5. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points $A(1;-1)$, $B(2;1)$ et $C(-1;3)$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.*

Propriété 5. Bilinéarité du produit scalaire

On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan et deux nombres réels λ et μ, alors :

$$\boxed{(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}=\lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})+\mu(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})}$$

Démonstration. Non exigible - On utilise la propriété 4. □

Propriété 6. Formule d'Al-Kashi

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan, alors :

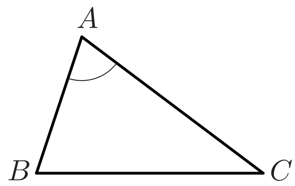
$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}||^2-||\overrightarrow{v}||^2\right)}$$

Démonstration. Exigible - On remarque que $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$. □

Théorème 1. Théorème d'Al-Kashi *ou* **Loi des cosinus**

On considère un triangle ABC du plan, alors :

$$\boxed{BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})}$$



Démonstration. Exigible - On utilise le produit scalaire. □

Remarque 8. *Ce théorème est une généralisation du théorème de Pythagore.*

Exercice 6. *Déterminer les mesures des angles d'un triangle dont les longueurs des côtés sont égales à 2, 3 et 4.*

2.2 Déterminant

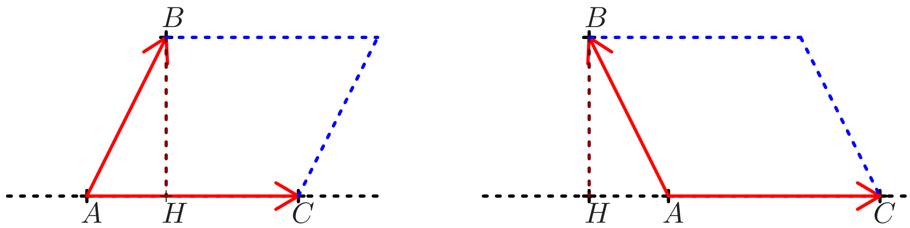
Définition 5. *On appelle* **déterminant** *de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan :*

$$\boxed{[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]=\begin{cases}||\overrightarrow{u}||\times||\overrightarrow{v}||\times\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}\\ 0 & \text{si } \overrightarrow{u}=\overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}\end{cases}}$$

Remarque 9. *Le déterminant est antisymétrique car* $\boxed{[\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]}$.

Remarque 10. *Le déterminant est nul si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.*

Propriété 7. *On considère trois points A, B et C non alignés du plan et on note H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC), alors $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=[\overrightarrow{HB},\overrightarrow{AC}]=\pm HB\times AC$.*



Démonstration. Exigible. □

Propriété 8. *On considère deux vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *du plan complexe, alors :*

$$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = xy' - yx'}$$

Démonstration. Non exigible - On note $z_{\overrightarrow{u}} = ||\overrightarrow{u}||e^{i\alpha}$ et $z_{\overrightarrow{v}} = ||\overrightarrow{v}||e^{i\beta}$ et on remarque que $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \mathcal{I}m(\overline{z_{\overrightarrow{u}}}z_{\overrightarrow{v}})$. □

Remarque 11. *Cette propriété n'est valide que si le plan est muni d'une base orthonormale.*

Exercice 7. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points* $A(1;-1)$*,* $B(2;1)$ *et* $C(-1;3)$*. Déterminer l'aire du triangle* ABC*.*

Exercice 8. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$*. Déterminer la mesure de l'angle* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$*.*

Propriété 9. Bilinéarité du déterminant

On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$*,* $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *du plan et deux nombres réels* λ *et* μ*, alors :*

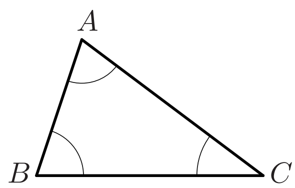
$$\boxed{[\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \lambda\,[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] + \mu\,[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]}$$

Démonstration. Non exigible - On utilise la propriété 8. □

Théorème 2. Loi des sinus

On considère un triangle ABC *du plan, alors :*

$$\boxed{\frac{\sin\widehat{BAC}}{BC} = \frac{\sin\widehat{ABC}}{AC} = \frac{\sin\widehat{ACB}}{AB}}$$



Démonstration. Exigible - On utilise le déterminant. □

3 Droites et cercles du plan

3.1 Droites

Propriété 10. Équation cartésienne d'une droite

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x;y)$ des points d'une droite $\mathcal{D}$ vérifient une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a;b)\neq(0;0)$, cette équation est appelée une **équation cartésienne** *de la droite $\mathcal{D}$.*

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x;y)$ vérifiant une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a;b)\neq(0;0)$ est une droite.

Démonstration. Exigible - On utilise le déterminant. □

Exercice 9. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points $A(1;2)$ et $B(-3;5)$.*

Propriété 11. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a;b)\neq(0;0)$. Alors le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un* **vecteur directeur** *de la droite $\mathcal{D}$ et le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un* **vecteur normal** *à la droite $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 10. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(5;-2)$ et parallèle à la droite d'équation $3x-2y+5=0$.*

Propriété 12. Paramétrage d'une droite

Dans le plan muni d'un repère orthonormal on considère une droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(x_A;y_A)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_{\overrightarrow{u}}\\y_{\overrightarrow{u}}\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Alors le point $M(x;y)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + t\ x_{\overrightarrow{u}} \\ y = y_A + t\ y_{\overrightarrow{u}} \end{cases}$$

Cette écriture est appelée un **paramétrage** *de la droite $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 11. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage de la droite passant par les points $A(1;2)$ et $B(-3;5)$.*

Propriété 13. Intersection de deux droites

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ ainsi qu'une droite $\mathcal{D}'$ d'équation cartésienne $a'x+b'y+c'=0$. Alors :

- *Si $ab'-ba'=0$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles ou confondues.*
- *Si $ab'-ba'\neq 0$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ admettent un unique point d'intersection.*

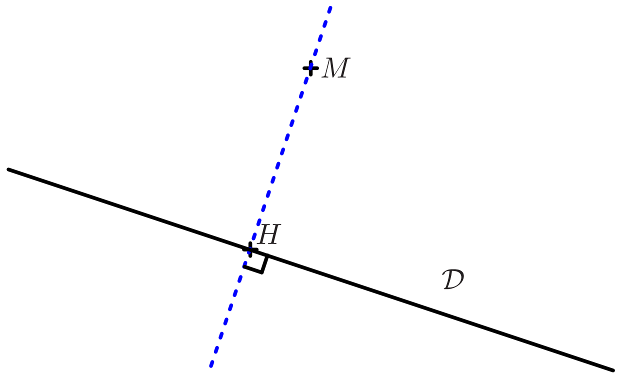
Démonstration. Exigible - on considère les vecteurs $\overrightarrow{n}\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{n'}\left(\begin{smallmatrix}a'\\b'\end{smallmatrix}\right)$. □

Exercice 12. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;2)$, $B(-1,-3)$, $C(1,-2)$ et $D(4;3)$. Montrer que les droites (AB) et (CD) admettent un unique point d'intersection puis déterminer ses coordonnées.*

Propriété 14. Distance d'un point à une droite

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a;b) \neq (0;0)$. Alors la distance d'un point $M(x_M; y_M)$ à la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\boxed{\mathrm{d}(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$



Démonstration. Exigible - On calcule $|\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}|$. □

Exercice 13. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer la distance du point $M(5; -2)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x - 2y + 5 = 0$ puis vérifier le résultat en calculant les coordonnées du projeté orthogonal H du point M sur la droite $\mathcal{D}$.*

3.2 Cercles

Propriété 15. Équation cartésienne d'un cercle

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x; y)$ des points d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R vérifient une équation de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$, cette équation est appelée une **équation cartésienne** *du cercle $\mathcal{C}$.*

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant une équation de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ avec x_ω, y_ω et R des nombres réels et $R \geqslant 0$ est un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 14. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, montrer que l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ est l'équation d'un cercle dont on déterminera le centre ainsi que le rayon.*

Propriété 16. Paramétrage d'un cercle

Dans le plan muni d'un repère orthonormal on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R. Alors le point $M(x; y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x & = & x_\Omega & + & R\cos t \\ y & = & y_\Omega & + & R\sin t \end{array} \right.$$

Cette écriture est appelée un **paramétrage** *du cercle $\mathcal{C}$.*

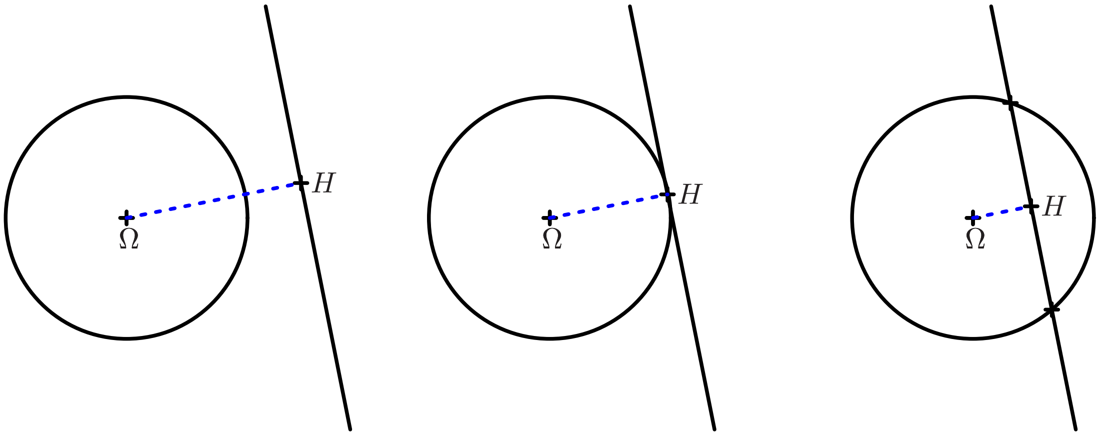
Démonstration. Exigible. □

Exercice 15. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage du cercle de centre $\Omega(-1; 3)$ et de rayon 2.*

Propriété 17. **Intersection d'une droite et d'un cercle**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ ainsi qu'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $R > 0$. Alors :

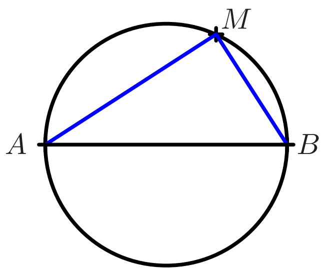
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) > R$, la droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$ n'ont aucun point d'intersection.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) = R$, la droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$ ont un unique point d'intersection et la droite $\mathcal{D}$ est dite tangente en ce point au cercle $\mathcal{C}$.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) < R$, la droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$ ont deux points distincts d'intersection.*



Démonstration. Exigible - On montre en utilisant le théorème de Pythagore que $HM^2 = R^2 - \mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D})^2$ avec M un point de $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ et H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$. □

Exercice 16. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, montrer que la droite et le cercle d'équations cartésiennes respectives $x - y + 4 = 0$ et $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ admettent deux points d'intersection puis déterminer leurs coordonnées.*

Propriété 18. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère deux points distincts A et B. Alors le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.*



Démonstration. Exigible - On montre que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$ avec I milieu de $[AB]$. □

Exercice 17. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-2; 1)$ et $B(2; 4)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.*

4 Transformations du plan

4.1 Translation

Définition 6. *Le point M' est l'image du point M par la* **translation** *de vecteur $\overrightarrow{u}$ si $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.*

$$t_{\overrightarrow{u}} : M \mapsto M'$$

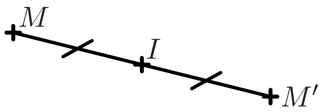
Propriété 19. *Une translation de vecteur non nul n'admet aucun point invariant.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 18. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer l'image A' du point $A(-1;3)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\binom{-4}{2}$.*

4.2 Symétrie centrale

Définition 7. *Le point M' est l'image du point M par la* **symétrie centrale** *de centre I si I est le milieu du segment $[MM']$.*



$$s_I : M \mapsto M'$$

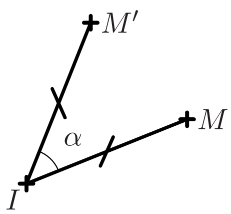
Propriété 20. *Une symétrie centrale admet son centre pour seul point invariant.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 19. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(5;2)$ et $B(3;-1)$. Déterminer l'image A' du point A par la symétrie centrale de centre B.*

4.3 Rotation

Définition 8. *Le point M' est l'image du point M par la* **rotation** *de centre I et d'angle α si $IM = IM'$ et $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \alpha$ (pour $M \neq I$).*



$$r_{I,\alpha} : M \mapsto M'$$

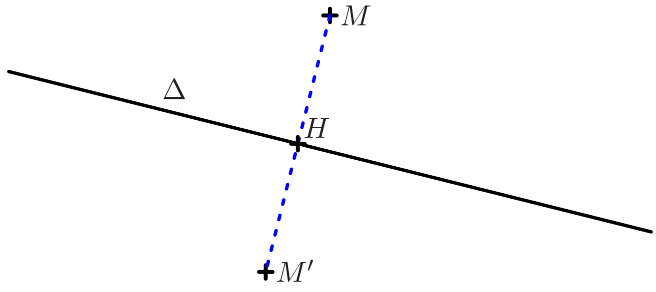
Propriété 21. *Une rotation d'angle non nul admet son centre pour seul point invariant.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 20. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, déterminer l'image A' du point $A(2;3)$ par la rotation de centre $I(-1;2)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. (on pourra utiliser les nombres complexes)*

4.4 Réflexion

Définition 9. *Le point M' est l'image du point M par la* **réflexion** *d'axe Δ si le projeté orthogonal de M sur Δ est le milieu du segment $[MM']$.*



$$s_\Delta : M \mapsto M'$$

Propriété 22. *L'ensemble des points invariants par une réflexion est son axe.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 21. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer l'image A' du point $A(1;2)$ par la réflexion d'axe Δ d'équation cartésienne $x+y=0$.*

4.5 Homothétie

Définition 10. *Soit I un point du plan et k un nombre réel non nul, on appelle* **homothétie** *de centre I et de rapport k la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :*

$$\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$$

Remarque 12. *Si $k=1$ l'homothétie est la transformation identité, si $k=-1$ l'homothétie est une symétrie centrale de centre I.*

Propriété 23. *Une homothétie de rapport différent de 1 admet son centre pour seul point invariant.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 22. *On considère un segment $[AB]$ de longueur 4 cm, contruire le point B_1 image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$ ainsi que le point B_2 image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.*