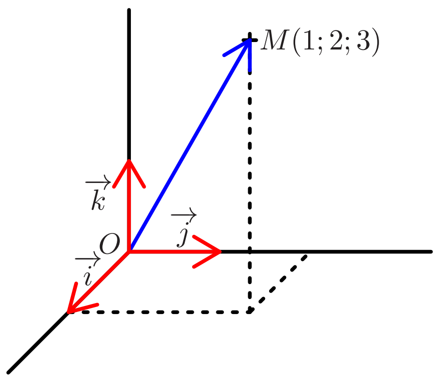
VI. Géométrie de l'espace

1 Repérage dans l'espace

Définition 1. *On appelle* **base** *de l'espace un triplet* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *avec* $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{k}$ *trois vecteurs non coplanaires de l'espace. Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *de l'espace s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs* $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{k}$ *sous la forme* $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{i} + \mu\overrightarrow{j} + \nu\overrightarrow{k}$ *avec* λ, μ *et* ν *des nombres réels. Les nombres* λ, μ *et* ν *sont appelés* **coordonnées** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, le nombre* λ *est appelé* **abscisse** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, le nombre* μ *est appelé* **ordonnée** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *et le nombre* ν *est appelé* **cote** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*. On note* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}$.

Remarque 1. *Dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, on a* $\overrightarrow{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Définition 2. *On appelle* **repère cartésien** *de l'espace un quadruplet* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, avec* O *un point du plan et* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *une base de l'espace. Le point* O *est appelé* **origine** *du repère, la droite* $(O, \overrightarrow{i})$ *est appelée* **axe des abscisses***, la droite* $(O, \overrightarrow{j})$ *est appelée* **axe des ordonnées** *et la droite* $(O, \overrightarrow{k})$ *est appelée* **axe des cotes***. Si les vecteurs* $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{k}$ *sont orthogonaux deux à deux, le repère est dit* **orthogonal** *si de plus ils sont de même norme alors le repère est dit* **orthonormal***. Tout point* M *de l'espace est repéré de manière unique par trois nombres* x, y *et* z *tels que* $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$*. Les nombres* x, y *et* z *sont appelés* **coordonnées** *du point* M *dans le repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, le nombre* x *est appelé* **abscisse** *du point* M *dans le repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, le nombre* y *est appelé* **ordonnée** *du point* M *dans le repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *et le nombre* z *est appelé* **cote** *du point* M *dans le repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*. On note* $M(x; y; z)$.



Remarque 2. *On admet que l'espace tout comme le plan peut être orienté, on utilisera la règle du* bonhomme d'Ampère *ou du* tire-bouchon de Maxwell *pour définir une* **base orthonormale directe***.*

2 Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte dans l'espace

2.1 Produit scalaire

Définition 3. *On appelle* **produit scalaire** *de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace :*

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{cases} ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right) & si\ \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}\ et\ \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ 0 & si\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\ ou\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}}$$

Remarque 3. *On ne peut pas définir la notion d'angle orienté de deux vecteurs non nuls dans l'espace.*

Remarque 4. *Le produit scalaire est symétrique car* $\boxed{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}$.

Remarque 5. *Le produit scalaire est nul si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.*

Propriété 1. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Démonstration. Hors-programme - On utilise la formule d'Al-Kashi $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$. □

Propriété 2. Bilinéarité du produit scalaire

On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace et deux nombres réels λ et μ, alors :

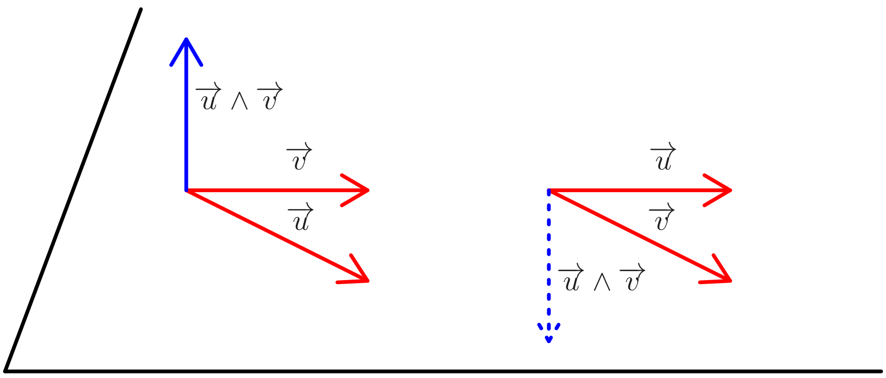
$$\boxed{(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}) + \mu(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})}$$

Démonstration. Hors-programme - On utilise la propriété 1. □

2.2 Produit vectoriel

Définition 4. *On appelle* **produit vectoriel** *de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ tel que :*

- *$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.*
- *le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base directe et $||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \sin\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.*



Remarque 6. *Le produit vectoriel est antisymétrique car* $\boxed{\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}}$.

Remarque 7. *Le produit vectoriel est nul si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.*

Remarque 8. *Si* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *est une base orthonormale directe de l'espace alors* $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$.

Exercice 1. *On considère une base orthonormale directe* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *de l'espace, calculer* $(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}) \wedge \overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{i} \wedge (\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j})$.

Propriété 3. Bilinéarité du produit vectoriel

On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *de l'espace et deux nombres réels* λ *et* μ, *alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge (\lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + \mu(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})}$$

Démonstration. Hors-programme - On montre que l'application $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est linéaire en tant que composée de trois applications linéaires (projection sur le plan orthogonal à $\overrightarrow{u}$, rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et homothétie de rapport $||\overrightarrow{u}||$). □

Propriété 4. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, *on considère deux vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, *alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k}}$$

Démonstration. Hors-programme - On utilise la propriété 3. □

Exercice 2. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe, on considère les vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Calculer* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

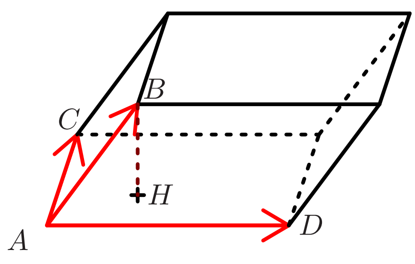
2.3 Produit mixte

Définition 5. *On appelle* **produit mixte** *de trois vecteurs* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *de l'espace :*

$$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})}$$

Remarque 9. *Le produit mixte est nul si et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *sont coplanaires.*

Propriété 5. *On considère quatre points* A, B, C *et* D *non coplanaires de l'espace et on note* H *le projeté orthogonal du point* B *sur le plan* (ACD), *alors* $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = [\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \pm HB \times ||\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}||$.



Démonstration. Non exigible. □

Exercice 3. *On considère une base orthonormale directe* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *de l'espace, calculer* $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$.

Propriété 6. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe, on considère trois vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$, *alors :*

$$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (xy'z'' + yz'x'' + zx'y'') - (zy'x'' + xz'y'' + yx'z'')}$$

Démonstration. Hors-programme - On utilise les propriétés 1 et 4. □

Propriété 7. Antisymétrie du produit mixte *On considère trois vecteurs* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *de l'espace, alors :*

$$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \;\; ; \;\; [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \;\; ; \;\; [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]}$$

Propriété 8. *Hors-programme - On utilise l'antisymétrie du produit vectoriel et la propriété 6.*

Exercice 4. *Montrer que* $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$.

Propriété 9. Trilinéarité du produit mixte

On considère quatre vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *de l'espace et deux nombres réels* λ *et* μ, *alors :*

$$\boxed{[\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \lambda[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + \mu[\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]}$$

Démonstration. Hors-programme - On utilise la définition du produit mixte et la propriété d'antisymétrie. □

Exercice 5. *Simplifier* $[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

3 Droites, plans et sphères de l'espace

3.1 Plans

Propriété 10. Équation cartésienne d'un plan

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x; y; z)$ *des points d'un plan* $\mathcal{P}$ *vérifient une équation de la forme* $ax + by + cz + d = 0$ *avec* a, b, c *et* d *des nombres réels et* $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, *cette équation est appelée une* **équation cartésienne** *du plan* $\mathcal{P}$.

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x; y; z)$ *vérifiant une équation de la forme* $ax + by + cz + d = 0$ *avec* a, b, c *et* d *des nombres réels et* $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ *est un plan.*

Démonstration. Exigible - On utilise le produit mixte. □

Exercice 6. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer une équation cartésienne du plan passant par les points* $A(2; 1; 1)$, $B(3; 2; 2)$ *et* $C(1; -1; -3)$.

Propriété 11. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère le plan* $\mathcal{P}$ *d'équation cartésienne* $ax + by + cz + d = 0$ *avec* a, b, c *et* d *des nombres réels et* $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$. *Alors le vecteur* $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *est un* **vecteur normal** *au plan* $\mathcal{P}$.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 10. *Dans le cas où le vecteur* $\overrightarrow{n}$ *est normé* ($a^2 + b^2 + c^2 = 1$), *l'équation cartésienne* $ax + by + cz + d = 0$ *est appelée* **équation normale** *du plan* $\mathcal{P}$.

Exercice 7. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A(-1;3;2)$ et parallèle au plan d'équation $3x-2y+5z=4$.*

Propriété 12. Paramétrage d'un plan

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal on considère un plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \\ z_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{v}} \\ y_{\overrightarrow{v}} \\ z_{\overrightarrow{v}} \end{pmatrix}$ pour vecteurs directeurs ($\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires). Alors le point $M(x;y;z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe $t_1 \in \mathbb{R}$ et $t_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & x_A & + & t_1 \; x_{\overrightarrow{u}} & + & t_2 \; x_{\overrightarrow{v}} \\ y & = & y_A & + & t_1 \; y_{\overrightarrow{u}} & + & t_2 \; y_{\overrightarrow{v}} \\ z & = & z_A & + & t_1 \; z_{\overrightarrow{u}} & + & t_2 \; z_{\overrightarrow{v}} \end{array}\right.$$

Cette écriture est appelée un **paramétrage** *du plan $\mathcal{P}$.*

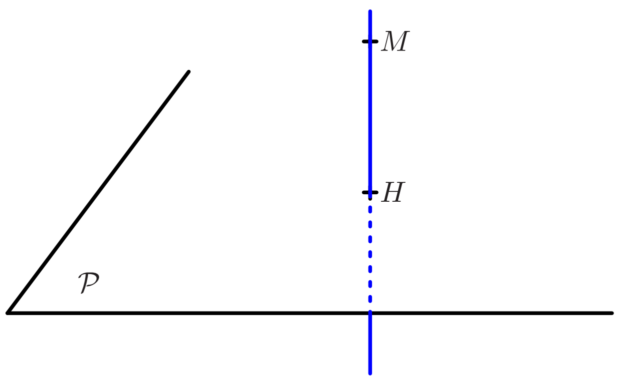
Démonstration. Exigible. □

Exercice 8. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage du plan passant par les points $A(1;2;3)$,$B(-1;2;1)$ et $C(5;4;3)$.*

Propriété 13. Distance d'un point à un plan

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c et d des nombres réels et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$. Alors la distance d'un point $M(x_M;y_M;z_M)$ au plan $\mathcal{P}$ est :

$$\boxed{\mathrm{d}(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$



Démonstration. Exigible - On introduit le projeté orthogonal H du point M sur le plan $\mathcal{P}$ et on calcule $|\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}|$. □

Exercice 9. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer la distance du point $M(1;1;1)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x-4y+5z+9=0$ puis vérifier le résultat en calculant les coordonnées du projeté orthogonal H du point M sur le plan $\mathcal{P}$.*

3.2 Droites

Propriété 14. Paramétrage d'une droite

On considère une droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \\ z_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Alors le point $M(x; y; z)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & x_A & + & t & x_{\overrightarrow{u}} \\ y & = & y_A & + & t & y_{\overrightarrow{u}} \\ z & = & z_A & + & t & z_{\overrightarrow{u}} \end{array}\right.$$

Cette écriture est appelée un **paramétrage** *de la droite $\mathcal{D}$.*

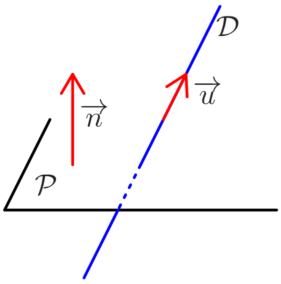
Démonstration. Exigible. □

Exercice 10. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage de la droite passant par les points $A(1; 2; 3)$ et $B(3; 2; 1)$.*

Propriété 15. Intersection d'une droite et d'un plan

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ admettant $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur et un plan $\mathcal{P}$ admettant $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal. Alors l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ est :

- *l'ensemble vide ou la droite $\mathcal{D}$ si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$.*
- *un point si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} \neq 0$.*

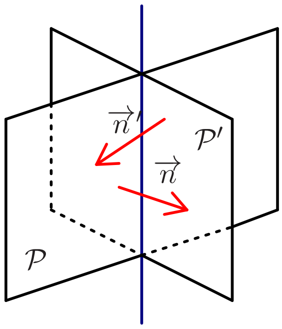


Démonstration. Exigible - On utilise un paramétrage de $\mathcal{D}$ et une équation cartésienne de $\mathcal{P}$. □

Propriété 16. Intersection de deux plans

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère un plan $\mathcal{P}$ admettant $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal et un plan $\mathcal{P}'$ admettant $\overrightarrow{n}'$ pour vecteur normal. Alors :

- *Si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ou confondus.*
- *Si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ ne sont pas colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$ admettant $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$ pour vecteur directeur.*



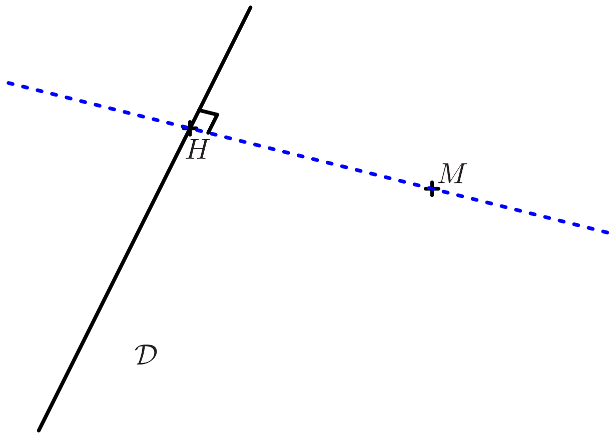
Démonstration. Non exigible - On part d'un système de deux équations en x, y et z puis on exprime x, y et z en fonction de x dans le cas où $bc' - b'c \neq 0$. □

Exercice 11. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P} : 2x + 3y + z = 1$ et $\mathcal{P}' : x + y + z = 2$.*

Propriété 17. Distance d'un point à une droite

Dans l'espace, on considère une droite $\mathcal{D}$ passant par le point A et admettant $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur. Alors la distance d'un point M à la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\boxed{\mathrm{d}(M,\mathcal{D}) = \frac{||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}||}{||\overrightarrow{u}||}}$$



Démonstration. Exigible - On introduit le projeté orthogonal H du point M sur la droite $\mathcal{D}$. □

Exercice 12. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer la distance du point $M(1;1;1)$ à la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1;6;3)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur puis vérifier le résultat en calculant les coordonnées du point H projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathcal{D}$.*

3.3 Sphères

Propriété 18. Équation cartésienne d'une sphère

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x;y;z)$ des points d'une sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(x_\Omega;y_\Omega;z_\Omega)$ et de rayon R vérifient une équation de la forme $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2 = R^2$, cette équation est appelée une **équation cartésienne** *de la sphère $\mathcal{S}$.*

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x;y;z)$ vérifiant une équation de la forme $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2 = R^2$ avec x_ω, y_ω, z_ω et R des nombres réels et $R \geqslant 0$ est une sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(x_\Omega;y_\Omega;z_\Omega)$ et de rayon R.

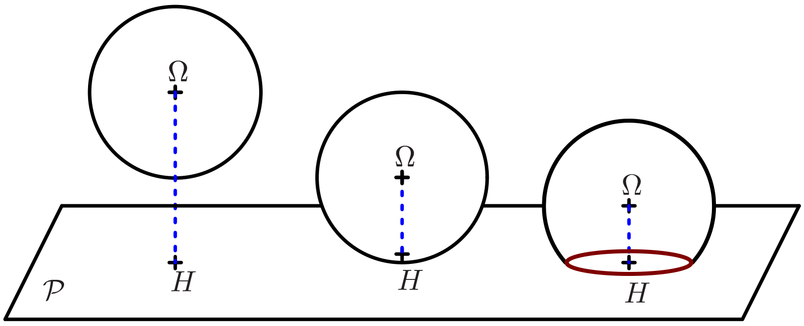
Démonstration. Exigible. □

Exercice 13. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, montrer que l'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-10=0$ est l'équation d'une sphère dont on déterminera le centre ainsi que le rayon.*

Propriété 19. **Intersection d'un plan et d'une sphère**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère un plan $\mathcal{P}$ ainsi qu'une sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω et de rayon $R > 0$. Alors :

- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P}) > R$, le plan $\mathcal{P}$ et la sphère $\mathcal{S}$ n'ont aucun point d'intersection.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P}) = R$, le plan $\mathcal{P}$ et la sphère $\mathcal{S}$ ont un unique point d'intersection qui est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$ et le plan $\mathcal{P}$ est dit tangent en ce point à la sphère $\mathcal{S}$.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P}) < R$, l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$ est un cercle de centre H projeté orthogonal de Ω sur le plan $\mathcal{P}$ et de rayon $r = \sqrt{R^2 - \mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P})^2}$.*



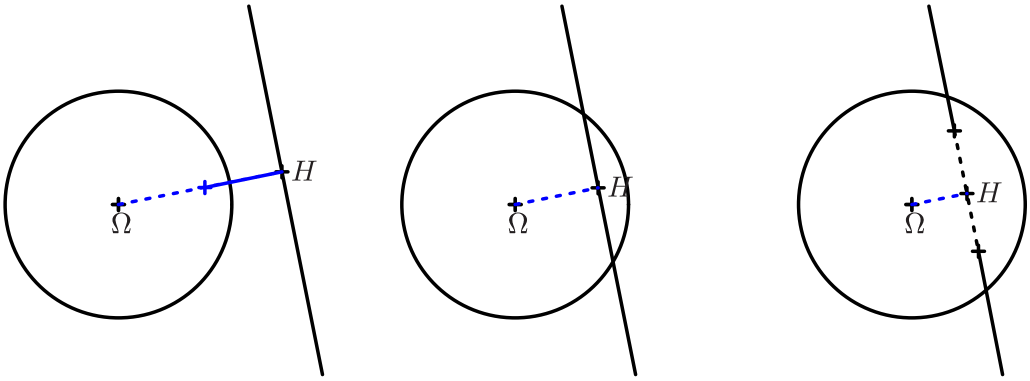
Démonstration. Non exigible - On montre que $HM^2 = R^2 - \mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P})^2$ avec M un point de $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ et H le projeté orthogonal de Ω sur le plan $\mathcal{P}$. □

Exercice 14. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal on considère le plan $\mathcal{P} : x + 2y + 3z = 6$ et la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(0; -1; -2)$ et de rayon 4. Déterminer le projeté orthogonal H du point Ω sur le plan $\mathcal{P}$ et en déduire l'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la sphère $\mathcal{S}$.*

Propriété 20. **Intersection d'une droite et d'une sphère**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ ainsi qu'une sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω et de rayon $R > 0$. Alors :

- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) > R$, la droite $\mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}$ n'ont aucun point d'intersection.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) = R$, la droite $\mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}$ ont un unique point d'intersection qui est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$ et la droite $\mathcal{D}$ est dit tangente en ce point à la sphère $\mathcal{S}$.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) < R$, la droite $\mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}$ ont deux points d'intersection.*



Démonstration. Non exigible - On montre que $HM^2 = R^2 - \mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D})^2$ avec M un point de $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ et H le projeté orthogonal de Ω sur la droite $\mathcal{D}$. □

Propriété 21. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère deux points distincts A et B. Alors le point M appartient à la sphère de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.*

Démonstration. Exigible - On montre que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - \frac{1}{4}AB^2$ avec I milieu de $[AB]$. □