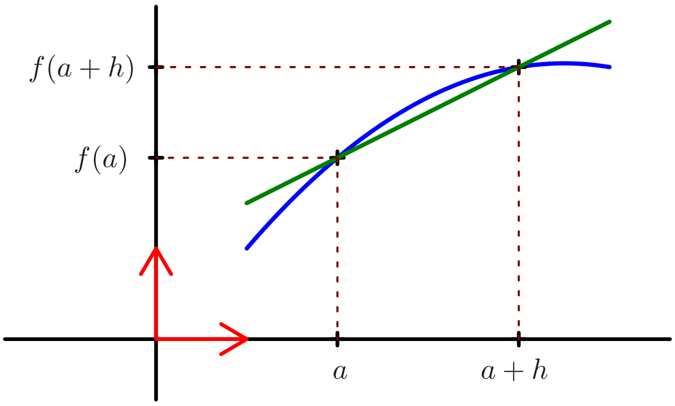
XIII. Dérivation

1 Dérivée d'une fonction

Définition 1. *On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$, on appelle* **taux d'accroissement** *de la fonction f en a la fonction $\Delta_{f,a} : h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.*



$\Delta_{f,a}(h)$ peut s'interpréter graphiquement comme le coefficient directeur de la droite passant par les points d'abscisses a et $a+h$ de la courbe représentative de la fonction f.

Définition 2. *On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$:*

- *si $\Delta_{f,a}$ admet une limite à droite en 0, on dit que f est* **dérivable à droite** *en a et on appelle cette limite* **nombre dérivé à droite** *de la fonction f en a que l'on note $f'_d(a)$.*
- *si $\Delta_{f,a}$ admet une limite à gauche en 0, on dit que f est* **dérivable à gauche** *en a et on appelle cette limite* **nombre dérivé à gauche** *de la fonction f en a que l'on note $f'_g(a)$.*
- *si $\Delta_{f,a}$ admet une limite à droite et une limite à gauche en 0 égales, on dit que f est* **dérivable** *en a et on appelle cette limite* **nombre dérivé** *de la fonction f en a que l'on note $f'(a)$.*

Exercice 1. *Montrer que la fonction inverse est dérivable en $a \in \mathbb{R}^*$ et calculer son nombre dérivé en a.*

Exercice 2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.*

Exercice 3. *Montrer que la fonction valeur absolue est dérivable à droite et à gauche en 0 mais n'est pas dérivable en 0.*

Propriété 1. *On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ dérivable en $a \in I$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une tangente au point d'abscisse a d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.*

Démonstration. Exigible. □

Remarque 1. *Dans le cas ou la fonction est dérivable à gauche ou à droite en a sa courbe représentative admet une demi-tangente à gauche ou à droite en a.*

Remarque 2. *Dans le cas ou le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite infinie en 0, la courbe représentative de la fonction f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.*

Définition 3. *Une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable en tout point de I est dite dérivable sur I et on appelle* **dérivée** *de la fonction f la fonction $f' : a \mapsto f'(a)$. On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies et dérivables sur I.*

On suppose connus les intervalles de dérivabilité ainsi que les dérivées des fonctions usuelles.

Propriété 2. *On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable en $a \in I$, alors :*

$$\boxed{f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)}$$

Démonstration. Exigible - On utilise $\Delta_{f,a}(x-a)$. □

Exercice 4. *Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $\sin x$, $\sqrt{1+x} - 1$, $e^x - 1$ et $\ln(1+x)$.*

Exercice 5. *On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$, montrer que s'il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{a}{=} c + d(x-a) + o(x-a)$ alors $f(a) = c$ et f est dérivable en a avec $f'(a) = d$.*

Corollaire 1. $\boxed{\text{Une fonction } f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \text{ dérivable en } a \in I \text{ est continue en } a.}$

Démonstration. Exigible. □

Contre-exemple 1. *La fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.*

2 Opérations sur les dérivées

Propriété 3. *On considère deux fonctions $u, v \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, alors :*
- *$u + v$ est dérivable sur I et* $\boxed{(u+v)' = u' + v'}$.
- *$u \times v$ est dérivable sur I et* $\boxed{(u \times v)' = u' \times v + u \times v'}$.
- *si u ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et* $\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}}$.
- *si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et* $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}}$.

Démonstration. Non exigible - On calcule le taux d'accroissement. □

Propriété 4. *On considère une fonction $f : I \to J$ bijective et dérivable sur I telle que f' ne s'annule pas sur I, alors son application réciproque g est dérivable sur J et* $\boxed{g' = \dfrac{1}{f' \circ g}}$.

Démonstration. Non exigible - On montre que $\Delta_{g,b}(l) = \dfrac{1}{\Delta_{f,a}(h)}$ où $a = g(b)$ et $h = g(b+l) - a$. □

Exercice 6. *Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array}$ est bijective, que son application réciproque* arctan *est dérivable et calculer* arctan$'$.

Propriété 5. *On considère une fonction $u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et une fonction $v \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R})$ avec $u(I) \subset J$, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et* $\boxed{(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)}$.

Démonstration. Non exigible - On calcule un développement limité d'ordre 1 de $v \circ u(x)$ en a en utilisant un développement limité de $v(y)$ en $u(a)$ et un développement limité de $u(x)$ en a. □

Exercice 7. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.*

3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

On peut définir par récurrence (si elle existe) la dérivée n-ième d'une fonction pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. *Montrer pour $k \in \mathbb{N}$ que la fonction $f : x \mapsto x^k$ est n fois dérivable pour $n \in [\![0, k]\!]$ et calculer $f^{(n)}$.*

Définition 4. *On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I*

Remarque 3. *Les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sur I sont les fonctions continues sur I.*

Remarque 4. *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à n sont continues sur I.*

Exercice 9. *Déterminer la classe de la fonction $f : x \mapsto x^3|x|$ sur $\mathbb{R}$.*

Définition 5. *On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I*

Exercice 10. *Montrer que la fonction cosinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\cos^{(n)}$.*

Propriété 6. *On considère deux fonctions $u, v \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ n fois dérivables sur I alors la fonction $u + v$ est n fois dérivable sur I et $\boxed{(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}}$.*

Démonstration. Exigible - On montre par récurrence sur k que $u + v$ est k fois dérivable sur I avec $(u + v)^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)}$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$. □

Corollaire 2. *On considère $u, v \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ alors $u + v \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 7. Formule de Leibniz
On considère deux fonctions $u, v \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ n fois dérivables sur I alors la fonction $u \times v$ est n fois dérivable sur I et $\boxed{(u \times v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} u^{(k)} \times v^{(n-k)}}$.

Démonstration. Non exigible - On montre par récurrence sur i que $u \times v$ est i fois dérivable sur I avec $(u + v)^{(i)} = \sum_{k=0}^{k=i} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} u^{(k)} \times v^{(i-k)}$ pour tout $i \in [\![0; n]\!]$. □

Corollaire 3. *On considère $u, v \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ alors $u \times v \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Exigible. □

Remarque 5. *On peut étendre la propriété au quotient si v ne s'annule pas sur I.*

Propriété 8. *On considère $u \in \mathcal{C}^n(I, J)$ et $v \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$ alors $v \circ u \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Non exigible. □

Propriété 9. *On considère $f \in \mathcal{C}^n(I, J)$ avec $n \geqslant 1$ admettant une application réciproque g et telle que f' ne s'annule pas sur I, alors $g \in \mathcal{C}^n(J, I)$.*

Démonstration. Non exigible. □

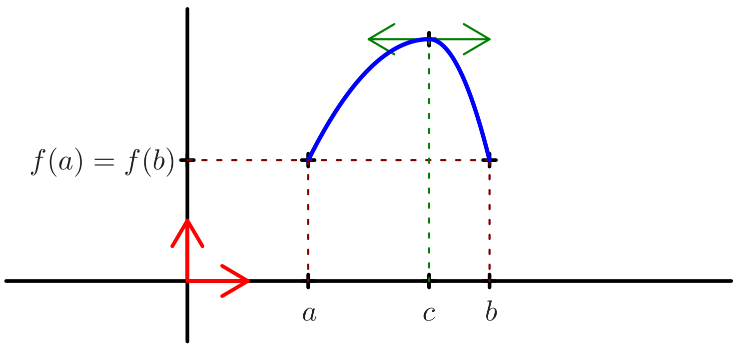
4 Propriétés des fonctions dérivables

Propriété 10. *On considère une fonction f à valeurs réelles définie à gauche et à droite de a et admettant un extremum local en a, si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Non exigible - On montre en utilisant le taux d'accroissement que $f'_g(a)f'_d(a) \leqslant 0$. □

Contre-exemple 2. *La fonction cube possède une dérivée qui s'annule en 0 mais elle n'admet pas d'extremum local en 0.*

Théorème 1. Théorème de Rolle
On considère une fonction f à valeurs réelles continue sur un intervalle $[a;b]$ non réduit à un point et dérivable sur $]a;b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

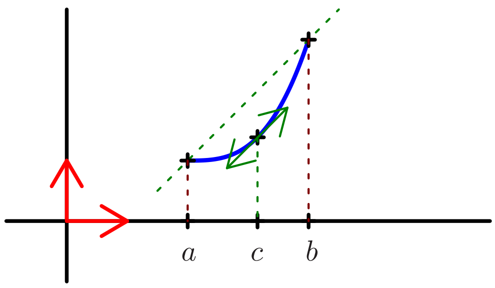


Démonstration. Non exigible - On remarque que comme f est continue, elle admet un extremum global en $c \in]a;b[$. □

Remarque 6. *c n'est pas forcément unique.*

Remarque 7. *Si la fonction f est dérivable sur $[a;b]$ alors elle est* a fortiori *continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.*

Théorème 2. Théorème des accroissements finis
On considère une fonction f à valeurs réelles continue sur un intervalle $[a;b]$ non réduit à un point et dérivable sur $]a;b[$ alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.



Démonstration. Non exigible - On applique le théorème de Rolle à la fonction $f - g$ ou g est la fonction affine telle que $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$. □

Corollaire 4. Inégalité des accroissements finis
On considère une fonction f à valeurs réelles continue sur un intervalle $[a;b]$ non réduit à un point et dérivable sur $]a;b[$ telle que $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in]a;b[$ alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 8. *Si $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in]a;b[$ alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a)$.*

Exercice 11. *Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que $\tan x \geqslant x$ pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$.*

Propriété 11. *On considère une fonction f à valeurs réelles définie et dérivable sur I, alors :*
- *Si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I.*
- *Si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' > 0$) sur I alors f est croissante (respectivement strictement croissante) sur I.*
- *Si $f' \leqslant 0$ (respectivement $f' < 0$) sur I alors f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I.*

Démonstration. Non exigible - On utilise le théorème des accroissements finis. □

Exercice 12. *Montrer que si f est une fonction croissante sur I et dérivable sur I alors $f' \geqslant 0$ sur I.*

Contre-exemple 3. *La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée s'annule en 0.*

Théorème 3. Théorème de la limite de la dérivée
On considère une fonction f à valeurs réelles continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b]$, si f' admet une limite à droite en a alors $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet la même limite à droite en a.

Démonstration. Non exigible - On utilise le théorème des accroissements finis. □

Remarque 9. *On peut également formuler ce résultat dans le cas d'une limite à gauche.*

Remarque 10. *Dans le cas où f' admet une limite finie en a, on en déduit que la fonction f est dérivable en a.*

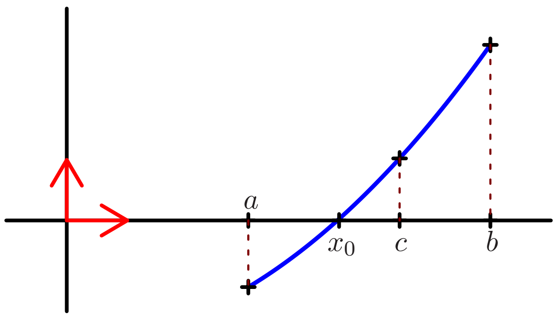
Exercice 13. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable en 0 en étudiant la limite du taux d'accroissement puis en utilisant la remarque 10.*

Exercice 14. *Montrer que la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & si \quad x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x > 0 \end{cases} \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

5 Calcul approché des zéros d'une fonction

5.1 Méthode de dichotomie

Propriété 12. *On considère une fonction $f \in \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$ strictement monotone avec $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur l'intervalle $[a;b]$ et pour tout $c \in]a;b[$:*
- *si $f(c) = 0$ alors $x_0 = c$.*
- *si $f(a)f(c) < 0$ alors $x_0 \in]a;c[$.*
- *si $f(c)f(b) < 0$ alors $x_0 \in]c;b[$.*



Démonstration. Exigible. □

La ***méthode de dichotomie*** consiste à itérer cette discrimination afin d'obtenir un encadrement de plus en plus précis de la racine de f, on choisit en général pour c le centre de l'intervalle $[a;b]$.

Exercice 15. *Déterminer un encadrement d'amplitude $\frac{1}{8}$ par des nombres rationnels de $\sqrt{2}$ en utilisant la méthode de dichotomie appliquée à la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur l'intervalle $[1;2]$.*

Exercice 16. *Que peut-on dire de l'amplitude d'un encadrement obtenu après n étapes de la méthode de dichotomie ?*

5.2 Utilisation de suites récurentes

Propriété 13. *On considère une fonction $f \in \mathcal{C}(I, I)$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in I$ on a $f(l) = l$.*

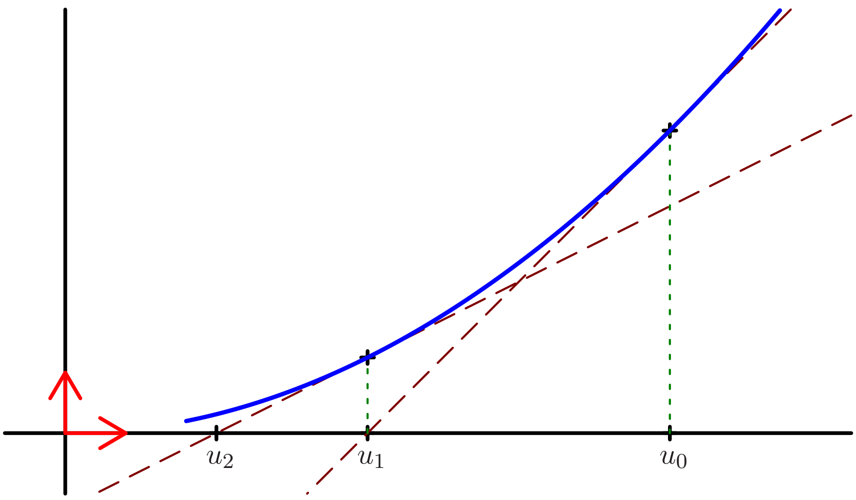
Démonstration. Exigible. □

Exercice 17. *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par* $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2u_n+2}{u_n+2} \end{array}\right.$.

1. *Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (on pourra étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+2}{x+2}$)*
2. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$. (on pourra utiliser le théorème de convergence monotone)*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$. (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[0; 2]$)*

5.3 Méthode de Newton

On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec f' ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, la ***méthode de Newton*** consiste en la construction d'une suite récurrente $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.



Exercice 18. *On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$.*

1. *Déterminer la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la fonction f par la méthode de Newton.*
2. *On pose $u_0 = 2$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = \sqrt{2}$. (on pourra utiliser le théorème de convergence monotone)*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{u_n^2 - 2}{2u_n^2}(u_n - \sqrt{2})$. (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[\sqrt{2}; u_n]$)*
4. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}|u_n - \sqrt{2}|^2$.*