XIV. Applications linéaires

1 Applications linéaires

Définition 1. *On dit qu'une application $f : E \to F$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels est* **linéaire** *si pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a $f(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v})$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

Remarque 1. *L'image par une application linéaire d'une combinaison linéaire de vecteurs est égale à la combinaison linéaire de leurs images.*

Remarque 2. *Si f est linéaire, $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.*

Remarque 3. *$\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Exemple 1. *Une homothétie vectorielle de rapport $k \in \mathbb{K}$ est une application linéaire :*

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & k\overrightarrow{u} \end{array}$$

Exemple 2. *La dérivation est une application linéaire :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Exercice 1. *Montrer que l'application* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$ *est linéaire.*

Définition 2.
- *Une application linéaire de E dans E est appelée un* **endomorphisme***, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.*
- *Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée une* **forme linéaire***.*

Exercice 2. *Donner un exemple de forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ puis donner un exemple de forme linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 3. *L'application $f \mapsto f \circ f$ est-elle un endomorphisme de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?*

Propriété 1. *La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

Démonstration. Exigible. □

Définition 3. *Une application linéaire bijective est appelée un* **isomorphisme***.*

Propriété 2. *L'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.*

Démonstration. Exigible. □

Définition 4. *Un endomorphisme bijectif est appelé un* **automorphisme***, on appelle* **groupe linéaire** *et on note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

Exercice 4. *Montrer que l'application f de l'exercice 1 est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et expliciter son application réciproque.*

2 Noyau et image d'une application linéaire

Propriété 3. *On considère $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et E', F' deux sous-espaces vectoriels respectifs des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, alors :*
- *L'image directe $f(E') = \{f(\overrightarrow{u}) \ / \ \overrightarrow{u} \in E'\}$ de E' est un sous-espace vectoriel de F.*
- *L'image réciproque $f^{-1}(F') = \{\overrightarrow{u} \in E \ / \ f(\overrightarrow{u}) \in F'\}$ de F' est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Exigible. □

Définition 5. *On considère $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
- *on appelle* **noyau** *de f,* $\boxed{\operatorname{Ker} f = f^{-1}\left(\left\{\overrightarrow{0_F}\right\}\right) = \left\{\overrightarrow{u} \in E \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0_F}\right\}}$.
- *on appelle* **image** *de f,* $\boxed{\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(\overrightarrow{u}) \ / \ \overrightarrow{u} \in E\}}$.

Remarque 4. $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de E et* $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

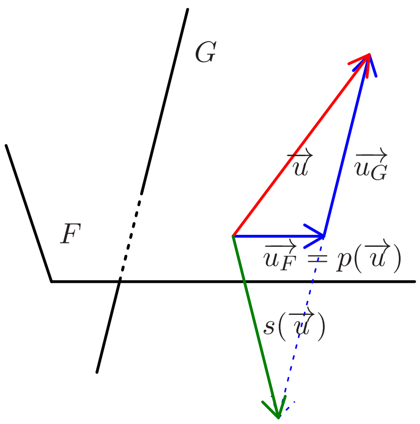
Exercice 5. *Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

Exercice 6. *Déterminer le noyau et l'image de la forme linéaire* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & x+y+z \end{array}$.

Propriété 4. *On considère $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors :*
- *f est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.
- *f est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration. Exigible. □

Définition 6. *On considère deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ il existe un unique couple $(\overrightarrow{u_F}, \overrightarrow{u_G}) \in F \times G$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_F} + \overrightarrow{u_G}$:*
- *l'application linéaire* $p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & \overrightarrow{u_F} \end{array}$ *est appelée* **projection** *(ou* **projecteur***) sur F parallèlement à G,*
- *l'application linéaire* $s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & \overrightarrow{u_F} - \overrightarrow{u_G} \end{array}$ *est appelée* **symétrie** *par rapport à F parallèlement à G.*



Remarque 5. *p est un endomorphisme de E et $p \circ p = p$, $s \circ s = Id_E$ donc s est un automorphisme d'application réciproque s.*

Exemple 3. *L'application linéaire* $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$ *est une projection.*

Exemple 4. *L'application linéaire* $s : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$ *est une symétrie.*

Exercice 7. *On considère p projection sur F parallèlement à G, déterminer* $\operatorname{Ker} p$ *et* $\operatorname{Im} p$*.*

Exercice 8. *On considère s symétrie par rapport à F parallèlement à G, déterminer* $\operatorname{Ker} s$, $\operatorname{Im} s$, $\operatorname{Ker}(s - Id)$ *et* $\operatorname{Ker}(s + Id)$*.*

Propriété 5. *Un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $f \circ f = f$ est une projection sur* $\operatorname{Im} f$ *parallèlement à* $\operatorname{Ker} f$*.*

Démonstration. Non exigible - On procède par analyse-synthèse. □

Propriété 6. *Un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $f \circ f = Id_E$ est une symétrie par rapport à* $\operatorname{Ker}(f - Id_E)$ *parallèlement à* $\operatorname{Ker}(f + Id_E)$*.*

Démonstration. Non exigible - On procède par analyse-synthèse. □

Définition 7. *On appelle* **équation linéaire** *d'inconnue $\overrightarrow{u}$ une équation de la forme $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in F$.*

Remarque 6. *L'équation linéaire $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ est compatible si $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Im} f$ et l'ensemble des solutions est $f^{-1}(\{\overrightarrow{v}\})$,* $\operatorname{Ker} f$ *est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène associée.*

Exercice 9. *Montrer que l'équation différentielle $y + y' = e^t$ où $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une équation linéaire et déterminer l'ensemble de ses solutions.*

3 Applications linéaires en dimension finie

Propriété 7. *On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ainsi qu'une famille $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ génératrice de E, alors $(f(\overrightarrow{e}_1), f(\overrightarrow{e}_2), \dots, f(\overrightarrow{e}_n))$ est une famille génératrice de $f(E)$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 10. *Déterminer une base de l'image de l'application linéaire* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) - XP'(X) \end{array}$.

Définition 8. *On appelle* **rang** *d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie,* $\boxed{\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f)}$.

Exercice 11. *Déterminer le rang de l'application linéaire* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) - XP'(X) \end{array}$.

Remarque 7. *Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec* $\dim E = \dim F$ *est surjective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = \dim F$*.*

Propriété 8. *On considère* $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $g \in \mathcal{L}(F,G)$ *où* E*,* F *et* G *sont des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie, alors* $\mathrm{rg}\ g \circ f \leqslant \mathrm{rg}\ g$*.*

Démonstration. Exigible - On remarque que $\mathrm{Im}\, g \circ f \subset \mathrm{Im}\, g$. □

Corollaire 1. *On considère* $f \in \mathrm{GL}(E)$ *et* $g \in \mathcal{L}(E,F)$ *où* E *et* F *sont deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie, alors* $\mathrm{rg}\ g \circ f = \mathrm{rg}\ g$*.*

Démonstration. Exigible - On remarque que $g = (g \circ f) \circ h$ où h est l'application réciproque de f. □

Théorème 1. **Théorème du rang**
On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *où* E *et* F *sont deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie, alors :*

$$\mathrm{rg}\ f = \dim\ E - \dim(\mathrm{Ker}\, f)$$

Démonstration. Hors-programme - On montre que f définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$ dans $\mathrm{Im}\, f$. □

Exercice 12. *Déterminer le rang de l'application* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -x+y \end{pmatrix} \end{array}$.

Remarque 8. *Si* $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *est bijective, nécessairement* $\dim\ E = \dim\ F$*.*

Exercice 13. *Construire un isomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$ *dans* $\mathbb{R}^3$*.*

Corollaire 2. *Une application linéaire* $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *où* E *et* F *sont deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une(toute) base de* E *en une base de* F*.*

Démonstration. Exigible. □

Corollaire 3. *On considère une application linéaire* $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *où* E *et* F *sont deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie avec* $\dim\ E = \dim\ F$*, alors :*

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Démonstration. Exigible. □

Contre-exemple 1. *L'application linéaire* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ *est surjective mais pas injective.*

Exercice 14. *Montrer que* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \mapsto & aX^2 + bX + c \end{array}$ *est un isomorphisme.*

Exercice 15. *Montrer que* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} \end{array}$ *est un automorphisme de* $\mathbb{R}^3$*.*

Corollaire 4. *On considère $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ où E, F et G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors* $\operatorname{rg} g \circ f \leqslant \operatorname{rg} f$.

Démonstration. Exigible - on remarque que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f$. □

Exercice 16. *On considère $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathrm{GL}(F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, montrer que* $\operatorname{rg} g \circ f = \operatorname{rg} f$.

4 Représentation matricielle d'une application linéaire

Propriété 9. *Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie est entièrement déterminée par l'image $(f(\overrightarrow{e}_1), f(\overrightarrow{e}_2), \ldots, f(\overrightarrow{e}_n))$ d'une base quelconque $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ de E.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 17. *Déterminer l'application linéaire f telle que $f(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2$ et $f(\overrightarrow{e}_2) = \overrightarrow{e}_1$ où $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

Définition 9. *On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{C} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$. On appelle matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$, $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathcal{M}at}\ f = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ avec $f(\overrightarrow{u_j}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}\overrightarrow{v_i}$ pour tout $j \in [\![1;p]\!]$.*

Remarque 9. *Les colonnes de la matrice de f sont les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ par l'application f.*

Remarque 10. *La matrice de l'application identité de E dans E où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est la matrice I_n.*

Exercice 18. *On considère l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. Déterminer la matrice de f de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_1[X]$ puis la matrice de f de la base $\mathcal{B}' = (1, 1+X, 1+X+X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathcal{C}' = (1, 1+X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$.*

Remarque 11. *Dans le cas où f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$, on note $\underset{\mathcal{B}}{\mathcal{M}at}\ f$ et on appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Exercice 19. *Déterminer la matrice de l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{array}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

Propriété 10. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$ et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de dimension n muni d'une base $\mathcal{C}$, alors l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathcal{M}at}\ f \end{array}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Exigible. □

Remarque 12. *Si E et F sont deux* K*-espaces vectoriels de dimension finie, alors* $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Exercice 20. *Déterminer l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ munis de leur base canonique associée à la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Propriété 11. *On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{C}$ et on considère un vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ de coordonnées $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ ainsi que son image $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u}) \in F$ de coordonnées $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ dans la base $\mathcal{C}$, alors en posant $M = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathcal{M}at}\, f$, $U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ on a $V = MU$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 21. *Interpréter matriciellement puis en terme d'application linéaire le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Corollaire 5. *On considère deux applications linéaires $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{C}$ et G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{D}$ alors* $\boxed{\underset{\mathcal{B},\mathcal{D}}{\mathcal{M}at}\, g \circ f = \underset{\mathcal{C},\mathcal{D}}{\mathcal{M}at}\, g \times \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathcal{M}at}\, f}$.

Démonstration. Exigible. □

Corollaire 6. *Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme si et seulement si sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$ est inversible et dans ce cas la matrice de l'application réciproque de f dans la base $\mathcal{B}$ est M^{-1}.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 22. *En utilisant un système linéaire, montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.*

Propriété 12. *L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé* **groupe linéaire** *et noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*

5 Changement de base

Définition 10. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on appelle* **matrice de passage** *de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice $\underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}}{\mathcal{M}at}\, Id_E$.*

Remarque 13. *Les colonnes de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ représentent les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Remarque 14. *La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.*

Exercice 23. *On considère $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et on définit $\overrightarrow{e_1}' = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_2}' = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$. Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}')$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.*

Propriété 13. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et on définit les matrices colonnes U et U' formées des coordonnées respectives d'un vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors $\boxed{U = PU'}$.*

Démonstration. Exigible. □

Remarque 15. *La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ permet de passer des coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}'$ à ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ (par multiplication matricielle).*

Exercice 24. *Dans le plan muni de sa base canonique, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 4$, déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{H}$ dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}'\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2}'\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$.*

Propriété 14. *On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, alors en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$, A la matrice de f de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ et A' la matrice de f de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{C}'$ on a $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$, les matrices A et A' sont dites* **équivalentes**.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 16. *Dans le cas d'un endomorphisme de E on a $\boxed{A' = P^{-1}AP}$, les matrices A et A' sont dites* **semblables**.

Exercice 25. *Dans le plan muni de sa base canonique, on considère la projection $p : (x, y) \mapsto (x, 0)$, déterminer l'expression de p dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}'\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2}'\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$.*

6 Rang d'une matrice

Définition 11. *On appelle rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans leurs bases canoniques.*

Remarque 17. *Le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs colonnes.*

Exercice 26. *Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 4 & 6\end{pmatrix}$.*

Exercice 27. *Montrer qu'un matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.*

Exercice 28. *Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$.*

Propriété 15. *Le rang d'une matrice est égal au rang du système linéaire associé.*

Démonstration. Exigible - On remarque que le nombre d'inconnues secondaires est égal à la dimension du noyau puis on applique le théorème du rang. □

Propriété 16. *On considère $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(QA) = \mathrm{rg}(A)$.*

Démonstration. Exigible - On remarque que le rang d'une application linéaire est invariant par composition par un automorphisme. □

Corollaire 7. *Le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie est égal au rang de sa matrice de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases quelconques de E et F.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 17. *Le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes.*

Démonstration. Hors-programme - On montre qu'une matrice de rang r est équivalente à une matrice diagonale comportant r coefficients égaux à 1 par multiplication à gauche et à droite par des matrices inversibles puis on procède par transposition. □