Réponses

1) $\max(E) = \sup(E) = \dfrac{3}{2}$ et $\inf(E) = -1$.

2) La suite est nécessairement la suite de raison $r = \dfrac{u_{19} - u_7}{19 - 7} = 1,4$ et de premier terme $u_0 = u_7 - 7r = -3$ d'où $u_{53} = -3 + 53r = 71,2$.

3) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1$.

4) Pour la condition suffisante, on remarque que $u_{n+1} - u_n$ est une constante.

5) Pour la condition suffisante, on remarque que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante.

6) On montre par récurrence que $u_n = 2^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

7) On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - 2n - 2^n}{3^{n+1}} \leqslant 0$.

8) On montre par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9) On montre par récurrence que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10) On montre que la suite est constante si $u_0 = 1$, minorée par 1 et strictement décroissante si $u_0 > 1$, majorée par 1 et strictement croissante si $u_0 < 1$.

11) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 car la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

12) Il existe un rang N tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{2}{3}$ pour tout $n \geqslant N$ d'où $u_n \leqslant u_N \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-N}$ pour tout $n \geqslant N$.

13) La suite converge vers 0 car $u_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n \dfrac{1 + \frac{3n}{(-2)^n}}{1 - \frac{2n}{3^n}}$.

14) La suite diverge car $u_n = 2\sin 1 \cos n - \dfrac{2\cos 1 \sin n}{n}$.

15) La suite converge vers x car $x - 10^{-n} < u_n \leqslant x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

16) On remarque que $u_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \ln(1+k) - \ln(k) = \ln(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

17) On procède par récurrence, la suite est croissante majorée par 2 donc elle converge vers $l \in [1;2]$.

18) On montre que les suites sont adjacentes et on remarque que $u_0 = 2$ et $v_0 = 3$.

19) Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

20) $u_n \sim 2^{n+2}$.

21) $u_n = o(v_n)$.

22) On remarque que $0 \leqslant \dfrac{1}{n^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^3 \leqslant \dfrac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{k=n} n^3 = 1$.

23) $\dfrac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} = 2 - \dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

24) En utilisant l'expression conjuguée, on obtient $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.