Réponses

1) $(P(X))^2 = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$ et $P(P(X)) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - X + 1$.

2) $P_n(X) = [X + (1 - X)]^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On montre que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} a_k X^{2k}$.

4) $\deg(P) = -\infty$ si $n < 2$ et $\deg(P) = 2n - 4$ si $n \geqslant 2$.

5) $P(X) = a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{C}$.

6) P est un polynôme constant ou le polynôme identité.

7) $a_0 = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} - 1 = 0$ et $a_1 = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} - n = 0$.

8) $Q(X) = X + 3$ et $R(X) = 3X$.

9) $R(X) = a(2 - b - a^2)X + (b - 2 + a^2)$ d'où $a^2 + b = 2$.

10) $P(X) = -X^3 + X^2$.

11) $R(X) = \dfrac{P(\alpha) - P(\beta)}{\alpha - \beta} X + \dfrac{\alpha P(\beta) - \beta P(\alpha)}{\alpha - \beta}$.

12) -1 est une racine d'ordre 3 du polynôme P.

13) $-2 < \alpha < -1$, $0 < \beta < 1$, $1 < \gamma < 2$ de plus $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $\alpha\beta\gamma = -1$.

14) $P(X) = (X - 1)(X - 1 + i)(X + 1 - i)$.

15) $P(X) = (X - 1)(X - i)(X + 1)(X + i) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$.

16) $P(X) = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$.

17) $P(X) = P'(\alpha)(X - \alpha) + P(\alpha)$.

18) $P(X) = aX(X^2 + 3)$ avec $a \in \mathbb{C}$.

19) $P = 0$ ou $P = (X + a)^2$ avec $a \in \mathbb{C}$.

20) $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} X^k$.

21) $P(X) = 0 + 1(X - 1) + 2\dfrac{(X - 1)^2}{2!} = X^2 - X$.

22) $z = -2i$ et $P(X) = (X + 2i)(X - i)^2$ ou $z = 2i$ et $P(X) = (X - 2i)(X + i)^2$.

23) 1 est racine d'ordre 2.

24) Une racine double α de P est racine de P', on obtient $\alpha = \dfrac{n + 2}{n + 1} > 1$ et $\alpha^{n+1} = \dfrac{1}{n + 2} < 1$.

25) On remarque que $P_n(X) = \dfrac{X^n}{n!} + P_n'(X)$ et on en déduit que P_n ne possède pas de racine d'ordre supérieur ou égal à 2.