Réponses

1) On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -1$, la fonction f n'admet pas de limite en 0 car $f(0) = 0$.

2) On pose $X = \frac{1}{x^2}$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{\sqrt{X}} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{-\sqrt{X}} = -\infty$.

3) On a $f(x) = x\left(2\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

4) On a $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$ de même $g(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = -\dfrac{1}{2}$.

5) On a $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

6) On a $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ pour $x \neq 0$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$.

7) On pose $u_n = 2n\pi$ et $v_n = (2n+1)\pi$, si la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ admettait une limite l en $+\infty$ on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = l$.

8) On montre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

9) On a $1 - x < f(x) \leqslant 1$ si $x > 0$ et $1 - x > f(x) \geqslant 1$ si $x < 0$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$.

10) On pose $a \in \mathbb{Z}$, f est continue sur $]a; a+1[$ car $f(x) = a + \sqrt{x-a}$ pour $x \in]a; a+1[$ et de plus $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = a - 1 + \sqrt{1} = a = f(a)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = a + \sqrt{0} = a = f(a)$.

11) On montre que f est bornée pour $x \leqslant M_1$ et pour $x \geqslant M_2$ puis si $x_1 < x_2$ on considère l'image du segment $[x_1; x_2]$ par la fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

12) On étudie les variations de la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 1$, f s'annule en $\alpha \in]-2, -1[$.

13) La fonction g est continue sur $[0; 1]$ avec $g(0) \leqslant 0$ et $g(1) \geqslant 0$ donc s'annule sur $[0; 1]$.

14) On a $f([-2; 2]) = [-\frac{6}{5}\sqrt{3}; \frac{6}{5}\sqrt{3}]$.

15) En divisant l'étude sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$, on montre que f est strictement croissante et que $f(\mathbb{R}) =]-1; 1[$, l'application réciproque est $y \mapsto \dfrac{y}{1-|y|}$.

16) On a $f \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}x$ et $f \underset{1}{\sim} x - 1$.

17) On remarque que le produit d'un fonction bornée au voisinage de $+\infty$ par une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$ est une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$.

18) On montre par encadrement que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.

19) On a $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

20) Contre-exemple : $f(x) = x$ et $g(x) = x + 1$.