Réponses

1) On a $\overrightarrow{i} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{u} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{j} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{v}$.

2) On a $z_{r_{-\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{u})} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}(3-2i) = \left(-\dfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) i$.

3) $r_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{u}) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

4) Les coordonnées polaires du point M sont $\rho = 4 - 2\sqrt{3}$ et $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$.

5) On a $||2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}||^2 - ||3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}||^2 = 5\left(||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2\right)$.

6) On utilise la relation $MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$, le lieu géométrique cherché est le cercle de diamètre $[AB]$.

7) On s'intéresse aux angles orientés $(\overrightarrow{u}, r_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{v}))$ et $(r_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v})$.

8) $\dfrac{17}{2}$.

9) On a $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

10) En utilisant la loi des sinus, on obtient $AB = 2\sqrt{2}\ (3 - \sqrt{3})$ et $AC = 4\ (\sqrt{3} - 1)$.

11) La droite admet pour équation cartésienne $2x + 3y - 1 = 0$.

12) Un paramétrage de la droite est $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

13) On montre que la hauteur issue de B admet pour équation cartésienne $2x - 3y + 4 = 0$ et que la hauteur issue de C admet pour équation cartésienne $x + y - 6 = 0$, on en déduit que les coordonnées de l'orthocentre sont $\left(\frac{14}{5}; \frac{16}{5}\right)$. On montre que la médiatrice du segment $[AB]$ admet pour équation cartésienne $x + y - 5 = 0$ et que la médiatrice du segment $[AC]$ admet pour équation cartésienne $4x - 6y - 1 = 0$, on en déduit que les coordonnées du centre du cercle circonscrit sont $\left(\frac{31}{10}; \frac{19}{10}\right)$.

14) La distance est $\dfrac{8}{\sqrt{13}}$.

15) Le cercle admet pour équation cartésienne $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 26$.

16) La droite (AB) d'équation cartésienne $x - y - 1 = 0$ et le cercle de centre Ω et de rayon 2 d'équation cartésienne $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ admettent deux points d'intersection ayant pour coordonnées $(2;1)$ et $(0;-1)$.

17) On appelle I le milieu du segment $[AB]$, les cercles de diamètres $[AB]$ et $[CI]$ admettent deux points d'intersection $M(6;1)$ et $N(2;3)$. Les tangentes cherchées sont les droites (CM) et (CN) admettant pour équations cartésiennes $3x - 4y - 14 = 0$ et $x - 2 = 0$.

18) On montre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\left(\begin{smallmatrix}-2\\4\end{smallmatrix}\right)$.

19) On montre que le milieu du segment $[MM']$ a pour coordonnées $(-1;2)$.

20) On obtient $M'(1-y; x+3)$.

21) On obtient $H(\frac{9}{25}x + \frac{12}{25}y + \frac{4}{5}; \frac{12}{25}x + \frac{16}{25}y - \frac{3}{5})$ et $M'(-\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y + \frac{8}{5}; \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{6}{5})$.

22) On obtient $M'(-2x-3; -2y+9)$.

23) Le centre de l'homothétie cherchée est le point Ω tel que $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

24) L'homothétie cherchée a pour rapport $-\dfrac{2}{3}$ et son centre a pour affixe $\dfrac{6-i}{5}$.