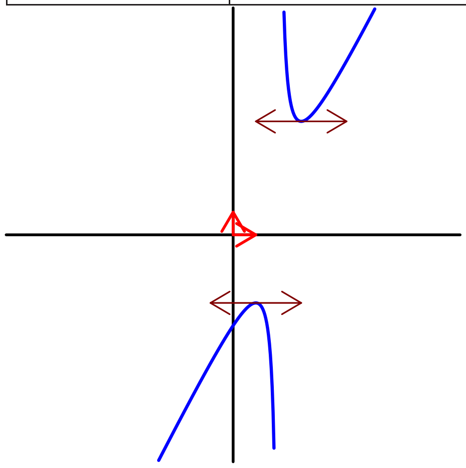
Réponses

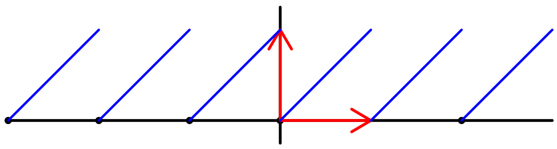
1) Pour $-3 \leqslant x \leqslant 5$ on a $1 \leqslant 2x^2+1 \leqslant 51$.

2)

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
variations de f			-3		‖	$+\infty$			$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	‖		$\searrow$	$\nearrow$	
	$-\infty$			$-\infty$	‖		5		



3)



4) Les solutions sont les réels x tels que $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$.

5) On a $\dfrac{e^x+1}{e^{x-1}} - e = e^{1-x}$.

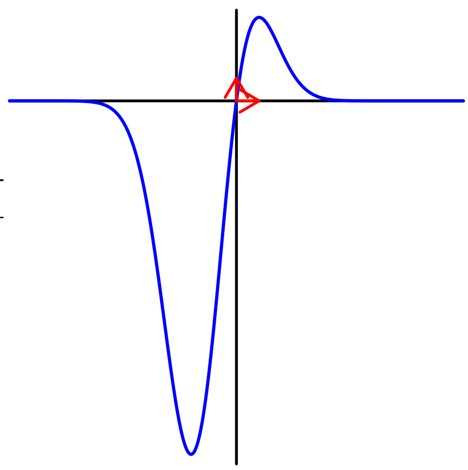
6) On a $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$ en posant $X = e^x$.

7)

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
variations de f	0				$\sqrt{\frac{e}{2}}$		
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			$-\sqrt{\frac{e}{2}}$				0

8)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	0				$\frac{10}{e}$		
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			$-20e^{-\frac{1}{4}}$				0



9) f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

10) On étudie les fonctions $x \mapsto x - \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On en déduit $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

11) On étudie les variations de la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) - \dfrac{\ln x + \ln y}{2}$.

12) On a $S = \{1;4\}$.

13) On étudie les variations de la fonction $x \mapsto x - 1 - \ln x$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis on utilise l'inégalité avec $x = \dfrac{\pi}{e}$.

14) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2^x)^{\frac{1}{x}} = 2$.

15)

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
variations de f	0	$\searrow$	$\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$	$\searrow$	2π

16) On a $x = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ en élevant l'équation au carré et en éliminant les solutions de l'équation $\sin x + \cos x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

17) On a $x = \dfrac{\sqrt{15} - 2\sqrt{2}}{12}$.

18) On a $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ si $x > 0$ et $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

19) On a $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$.