Réponses

1) On remarque que la matrice nulle n'est pas inversible.

2) On remarque que la suite nulle n'est pas une suite qui diverge vers $+\infty$.

3) On remarque que la fonction nulle est une fonction paire et qu'une combinaison linéaire de fonctions paires est une fonction paire, on remarque que la fonction nulle est une fonction impaire et qu'une combinaison linéaire de fonctions impaires est une fonction impaire.

4) Si f est la fonction identité et g la fontion cube, $f-g$ n'est pas monotone.

5) On remarque que $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ et que la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

6) On remarque que $f(x)=f(0)+[f(x)-f(0)]$ et qu'une fonction constante s'annulant en 0 est nulle.

7) On remarque que $f(x)=f(1)x+[f(x)-f(1)x]$ et qu'une fonction linéaire s'annulant en 1 est nulle.

8) $F\oplus G=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\ /\ x-y+z=0\right\}$.

9) $F+G=\mathbb{R}[X]$ car $P(X)=(P(X)-P(0))+P(0)$, on remarque que la somme n'est pas directe en considérant le polynôme $P(X)=X^2$.

10) $\text{Vect}(1,i)=\mathbb{C}$.

11) $\text{Vect}(\cos,\sin)$.

12) On recherche λ, μ et ν tels que $\lambda(X-1)(X-2)+\mu(X-2)(X-3)+\nu(X-1)(X-3)=0$ en utilisant la liberté de la famille $(1,X,X^2)$.

13) On recherche λ, μ et ν tels que $\lambda(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\mu(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})+\nu(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w})=0$ en utilisant la liberté de la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$.

14) On procède par récurrence en remarquant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1}\lambda_k(1+X+\cdots+X^k)=\sum_{k=1}^{k=n-1}\lambda_k(1+X+\cdots+X^k)+(\lambda_n+\lambda_{n+1})(1+X+\cdots+X^n)+\lambda_{n+1}X^{n+1}$.

15) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right\}$.

16) On montre que $(t\mapsto e^t\cos t, t\mapsto e^t\sin t)$ est une base.

17) $\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$

18) $\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

19) $\mathbb{R}_1[X]$.

20) Le rang est 3 en remarquant que $1=\frac{1}{2}(1+X)+\frac{1}{2}(1-X)$, $X=\frac{1}{2}(1+X)-\frac{1}{2}(1-X)$ et $X^2=\frac{1}{2}(1+X^2)-\frac{1}{2}(1-X^2)$.