Réponses

1) On montre que $\Delta_{f,1}$ admet 5 pour limite à gauche et à droite en 0.

2) $\tilde{f}$ n'est pas dérivable en 0.

3) On montre que si f est paire $\Delta_{f,-a}(h) = -\Delta_{f,a}(-h)$ et que si f est impaire $\Delta_{f,-a}(h) = \Delta_{f,a}(-h)$.

4) $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5) On utilise un développement limité d'ordre 1 de f en a.

6) $f(a) - af'(a)$.

7) On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} e^{kx} = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}$, la somme cherchée est $f'(x) = \dfrac{ne^{(n+2)x} - (n+1)e^{(n+1)x} + e^x}{(1-e^x)^2}$.
(on traite séparément le cas $x = 0$)

8) On procède par dérivation en remarquant que les fonctions associées ont même dérivée et même valeur en 0.

9) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ et $g^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, on remarque que $h = \frac{1}{2}(f+g)$.

10) Pour $n \geqslant 2$, on a $f^{(n)}(x) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} (x^2+x+1) \times (-1)^n e^{-x} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (2x+1) \times (-1)^{n-1} e^{-x} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} 2 \times (-1)^{n-2} e^{-x} = (-1)^n [x^2 + (1-2n)x + (n-1)^2] e^{-x}$ et la formule est valable également pour $n = 0$ ou $n = 1$.

11) On montre que f est continue en 0, dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$ et que f' est continue en 0.

12) Le prolongement par continuité de f est dérivable mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

13) $f(t) = \begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si} \quad t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ C_2 e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$.

14) On utilise le théorème de Rolle.

15) On utilise le théorème de Rolle.

16) On remarque que $\sin'(\theta) = \cos(\theta) \in [\cos x; 1]$ pour $\theta \in [0; x]$.

17) On remarque que $\frac{1}{1+c} \in [\frac{1}{1+x}; 1]$ pour $c \in [0; x]$.

18)
1. $\alpha \in [0; 1]$.
2. (a) On utilise le théorème de la limite monotone en remarquant que la suite est croissante et majorée par 1.
   (b) On applique l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[u_n; \alpha]$ à la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$ en remarquant que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour $x \in [0; 1]$.

19)
1. On a $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.
2. On a $u_n = u_0(-1)^n$.

20)
1. On a $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.
2. On étudie les variations de la fonction $g : x \mapsto x(2 - \ln x)$ sur l'intervalle $]0; e]$.
3. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[u_n; e]$.
4. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[u_n; e]$.