Réponses

1) On utilise la linéarité de l'intégrale. ϕ est surjective mais pas injective.

2) Si il existe $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = \alpha \neq 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{K}$ on a par linéarité $f\left(\dfrac{x}{\alpha}\overrightarrow{u}\right) = x$.

3) f a pour application réciproque $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ z-y \end{pmatrix}$.

4) $\text{Ker } f = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$.

5) Pour $n \geqslant 2$, $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^2)$ et $\text{Im } f = \text{Vect}(1, X, X^3, \ldots, X^n)$.

6) On procède par double inclusion.

7) On procède par double inclusion.

8) On remarque que si P est non nul $P - P'$ est non nul donc $\text{Ker } f = \{0\}$ et f est injective donc bijective car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie. On remarque que si $P + P' = Q$ alors $P = Q + Q' + Q'' + \cdots + Q^{(n)}$.

9) $p \circ p = p$ donc p est un projecteur sur $\text{Im } p$ plan vectoriel d'équation $x + y - z = 0$ parallèlement à $\text{Ker } p$ droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$s \circ s = Id$ donc s est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - Id)$ plan vectoriel d'équation $y - z = 0$ parallèlement à $\text{Ker}(s - Id)$ droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

10) $\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -x-2y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

11) On a $aX^2 + bX + c = a(1 + X + X^2 - 1 - X) + bX + c = a(1 + X + X^2) + (b-a)X + (c-a)$ d'où $s(aX^2 + bX + c) = a(1 + X + X^2) - (b-a)X - (c-a) = aX^2 + (2a-b)X + (2a-c)$.

12) On a $s \circ s = 2p \circ (2p - Id) - (2p - Id) = 4(p \circ p - p) + Id$ donc $s \circ s = Id$ équivaut à $p \circ p = p$.

13) On a $(s - Id) \circ (s + Id) = 0$ donc $\text{Im}(s + Id) \subset \text{Ker}(s - Id)$ et si $s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{u} = (s + Id)(\frac{1}{2}\overrightarrow{u})$ d'où $\text{Ker}(s - Id) \subset \text{Im}(s + Id)$.

14) $\text{rg}(-f) = \text{rg}(2f) = \text{rg } f$.

15) On remarque que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$ puis que $f = (f + g) + (-g)$.

16) D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im } f) = \dim E - \dim(\text{Ker } f)$ d'où si $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, $\dim(\text{Ker } f + \text{Im } f) = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f) = \dim(E)$.

17) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

18) $\begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & -1 & & (0) & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & n-2 \end{pmatrix}$.

19) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

20) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

21) $\underset{\mathcal{B}'}{\mathcal{M}at}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

22) $P^2 = P$ donc p est une projection sur $\operatorname{Im} p = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; x+y+z=0 \right\}$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; y=z=0 \right\}$.

23) $S^2 = I_3$ donc s est une symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s-Id) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; x+y+z=0 \right\}$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s+Id) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; y=z=0 \right\}$.

24) $\underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}}{\mathcal{M}at}\ Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{\mathcal{M}at}\ Id = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

25) On a $\overrightarrow{e_1}' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_2}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_3}' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & 3^n-2^n \\ 0 & 2^n & 3^n-2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

27) $\operatorname{rg} M = 2$.

28) Le rang de M_λ vaut 1 si $\lambda = -1$, 2 si $\lambda = 2$ et 3 sinon.