Réponses de l'épreuve de Mathématiques 2 du Concours blanc

Problème

Partie A (Résolution d'une équation différentielle)

1. (a) $y_H(x) = \lambda x$.

   (b) $y_P(x) = -1 - \ln x$.

   (c) $y_G(x) = y_H(x) + y_P(x) = \lambda x - 1 - \ln x$.

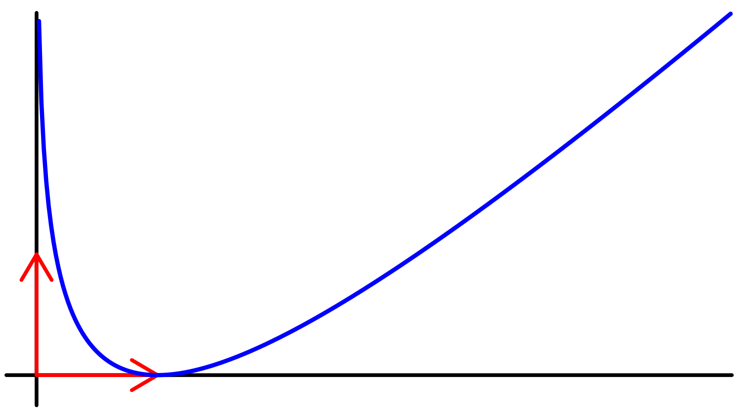
   (d) $f(x) = x - 1 - \ln x$.
2. (a) $\alpha = 1$.
   (b) On a $xK'' + K' = 0$ d'où $K(x) = \lambda \ln x + \mu$.
   (c) $y_H(x) = \lambda x \ln x + \mu x$.
   (d) On remarque que $y_0'(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $y_0''(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
   (e) $y_G(x) = y_0(x) + y_H(x) = -1 - \ln x + \lambda x \ln x + \mu x$.
   (f) On montre que $\mu = 1$ et $\lambda = 0$.

Partie B (Étude de la fonction f)

1.

$$\begin{array}{c|c|ccccc}
x & 0 & & & 1 & & \\
\hline
 & \| & +\infty & & & & +\infty \\
f(x) & \| & & \searrow & & \nearrow & \\
 & \| & & & 0 & &
\end{array}$$

2.



3. On remarque que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x \ln x$.
5. $\displaystyle\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \int_\epsilon^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F(\epsilon) = \frac{1}{2}$.
6. $\displaystyle\lim_{M \to +\infty} \int_1^M f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M \to +\infty} F(M) = +\infty$.

Partie C (Comparaison des moyennes)

1. En sommant les inégalités, on obtient $\ln\left(\dfrac{a_1a_2\dots a_n}{m_a^n}\right) \leqslant \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{m_a} - n$ soit $n\ln\dfrac{m_g}{m_a} \leqslant 0$.
2. On a $m_g = m_a$ si $\dfrac{a_i}{m_a} = 1$ pour tout i soit $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
3. C'est évident pour $xyz = 0$ sinon on utilise la question précédente avec $a_1 = x^4y^2z^2$, $a_2 = x^2y^4z^2$, $a_3 = x^2y^2z^4$ et $a_4 = 1$.
4. On montre que $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}} \leqslant \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)$.
5. On a $m_h = m_g$ si $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \cdots = \frac{1}{a_n}$ soit $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
6. On remarque que $m_h \leqslant m_g \leqslant m_a$ d'où $\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}} \leqslant \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

Partie D (Détermination d'un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$)

1. On pose $a_i = i$.
2. On remarque que $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{x} \geqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{k} = \frac{1}{k}$.
3. En sommant les inégalités de la question précédente, on obtient $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \geqslant \sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}$.
4. On en déduit que $\dfrac{1+\ln n}{n} \geqslant \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}}{n} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ car $m_a \geqslant m_g$.
5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!} = +\infty$.
6. On montre que $\ln\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right) - \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) = \dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}[\ln(n+1)-\ln k] \geqslant 0$.
7. On a $0 < \dfrac{1}{1+\ln n} \leqslant \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leqslant \dfrac{n+1}{2n} \leqslant 1$.
8. On somme les inégalités $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\ln x\,\mathrm{d}x \leqslant \ln k \leqslant \int_{k}^{k+1}\ln x\,\mathrm{d}x$ pour $k \geqslant 2$, l'inégalité obtenue est vraie également pour $n = 1$.
9. On en déduit que $n\ln n - n + 1 \leqslant \ln(n!) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n$ d'où $e^{\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{e\sqrt[n]{n!}}{n} \leqslant e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\ln(n+1)}$ et enfin $\sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e}$.