Réponses de l'épreuve de Mathématiques 1 du Concours blanc

Exercice

1. $e = \sqrt{10} > 1$.
2. $M(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - \frac{\sqrt{10}}{6} & 3\sqrt{10} \\ y + \frac{\sqrt{30}}{6} & -3\sqrt{30} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x + y = 0$.
3. $M(x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{\sqrt{10}}{6}\right)^2 + \left(y + \dfrac{\sqrt{30}}{6}\right)^2 = 10\dfrac{\left|3\sqrt{10}x - 3\sqrt{30}y - 2\right|^2}{(3\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{30})^2}$.
4. $S\left(-\dfrac{1}{6}, \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$ et $S'\left(\dfrac{1}{6}, -\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$ sont les points d'intersection de $\mathcal{H}$ et Δ.
5. On a $a = \dfrac{SS'}{2} = \dfrac{1}{3}$, $c = ae = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ et $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 1$. L'équation de $\mathcal{H}$ dans son repère focal est $9X^2 - Y^2 = 1$.

Problème

Partie A (Un exemple en dimension 3)

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.
2. Les coefficients de A sont positifs et $\frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = 1$.
3. A:=matrix([[7/10,2/5,1/2],[3/10,0,1/10],[0,3/5,2/5]]) ; X:=matrix([[1/2],[1/2],[0]]) ; for k from 1 to 2012 do X:=multiply(A,X) od : eval(X) ;
4. $\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible.
5. $V = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
6. $V = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
7. $V = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
8. $\alpha = 1$ et $\beta = -3$.
9. $P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

10. On a $PD^0P^{-1}X_0 = PP^{-1}X_0 = X_0$ et $X_{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1}X_0 = PD^{n+1}P^{-1}X_0$.
11. $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{10^{-n}}{2} \\ \frac{1}{5} - \frac{10^{-n}}{2} \\ \frac{1}{5} + 10^{-n} \end{pmatrix}$.
12. $l_x = \dfrac{3}{5}$, $l_y = \dfrac{1}{5}$ et $l_z = \dfrac{1}{5}$.
13. On remarque que $L = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie B (Cas de la dimension 2)

1. On remarque que $a \geqslant 0$ et $1 - a \geqslant 0$.
2. On remarque que $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ (1-a)x + (1-b)y \end{pmatrix}$.
3. On remarque que $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $-1 \leqslant -b \leqslant 0$.
4. (a) On montre que $a = 0$ et $b = 1$, on a $A^2 = I_2$ et $X_{2p} = X_0$ et $X_{2p+1} = X_1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (b) On montre que $a = 1$ et $b = 0$, on a $A = I_2$ et la suite (X_n) est constante.
5. $V = \lambda\begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
6. $V = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
7. $P = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1-a & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{b-a+1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-a & -b \end{pmatrix}$
8. $X_n = \begin{pmatrix} x_0q^n & + & \frac{b(1-q^n)}{b-a+1} \\ -x_0q^n & + & \frac{1-a+bq^n}{b-a+1} \end{pmatrix}$ avec $q = a - b$.
9. $l_x = \dfrac{b}{b-a+1}$ et $l_y = \dfrac{1-a}{b-a+1}$.
10. On remarque que $L = \dfrac{1}{b-a+1}\begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$.

Partie C (Un cas particulier)

1. On remarque que $\det(A) = b - a = 0$.
2. $A^2 = A$.
3. La suite (X_n) est donc constante à partir du rang 1.
4. (a) On a $f \circ f = f$ donc f est un projecteur.
   (b) $\mathrm{Ker} f : x + y = 0$ et $\mathrm{Im} f : (1-a)x - ay = 0$.
   (c) En posant $\overrightarrow{n}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}_2\begin{pmatrix} 1-a \\ -a \end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{n}_1.\overrightarrow{n}_2 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.