

## TD 26 : Variables aléatoires

### **Exercice 1** V.a. classique

Dans une kermesse on propose le jeu suivant en annonçant « il y a plus de cartes pour gagner que pour perdre, venez jouer » :

- On tire simultanément 2 cartes dans un jeu classique de 32 cartes. As, roi dame et valet comptent pour 10, les autres comptent pour leur valeur.
- Si la somme des valeurs des 2 cartes tirées est égale à 20 le joueur gagne 2 euros.
- Si la somme des valeurs des 2 cartes tirées est inférieure ou égale à 19 le joueur perd 2 euros.

Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire qui représente le gain du joueur.

Que pensez vous de ce jeu ?

### **Exercice 2** $f(X)$ et formule transfert

Soit  $X$  suivant une loi uniforme sur  $[-2, 2]$ .

1. Déterminer la loi de  $Y = X^2$ .
2. Calculer l'espérance de  $X$ .
3. Calculer l'espérance de  $Y$  directement puis en utilisant la formule du transfert.

### **Exercice 3** Indépendance

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $\{-1; 1\}$ .

On pose  $Z = XY$ .

1. Déterminer si les variables  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont deux à deux indépendantes.
2. Déterminer si les variables  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont mutuellement indépendantes.

### **Exercice 4** Lois conjointe et marginales

On tire simultanément 2 boules dans une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant le plus petit nombre et  $Y$  la variable aléatoire donnant le plus grand nombre.

Donner la loi conjointe de  $X$  et  $Y$ , puis les lois marginales de  $X$  et  $Y$ .

### **Exercice 5** Bernoulli + espérance

Dans un jeu on jette un dé à six faces parfaitement équilibré, le résultat affiché sur la face supérieure indique l'action du joueur. Le dé comporte les faces suivantes :

- 1 face numérotée 0, le joueur passe son tour ;
- 1 face numérotée -1, le joueur recule d'une case sauf s'il est au départ ;
- 4 faces numérotées de 1 à 4, le joueur avance du nombre de cases correspondant au numéro.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note :

- $X_n$  la variable aléatoire qui désigne le nombre de fois où le joueur avance sur les  $n$  lancers ;

- $C$  la variable aléatoire désignant le numéro du dé lors d'un lancé.

1. Quelle est la probabilité de  $\{X_8 \geq 3\}$  ?
2. Calculer l'espérance de  $C$ . Que cela représente-t-il ?

#### **Exercice 6**

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes classique.

$X$  est la variable aléatoire indicatrice de l'évènement « la carte est une dame ».

$Y$  est la variable aléatoire indicatrice de l'évènement « la carte est un coeur ».

1. Déterminer la loi conjointe du couple  $(X, Y)$ .
2. Les variable aléatoire  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

#### **Exercice 7**

Dans une urne dont on ne voit pas le contenu se trouvent 10 boules rouges et 5 vertes indiscernables au toucher.

On pioche avec remise six boules dans l'urne et on note  $R$  le nombre de boules rouges obtenues et  $V$  le nombre de vertes.

Donner la loi, l'espérance et la variance de  $R$  et de  $V$ .