

Table des matières

11	Systèmes linéaires	1
1	Matrices et systèmes linéaires	1
1.1	Généralités	1
1.2	Opérations élémentaires	3
2	Algorithme du pivot de Gauss-Jordan	4
2.1	Échelonnement	4
2.2	Pratique de l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan	5
3	Résolution d'un système linéaire	7
3.1	Différents types de systèmes	7
3.2	Systèmes homogènes	7
3.3	Structure des solutions	7
4	Applications à la géométrie	9
4.1	Exemple : deux droites dans le plan	9
4.2	Exemple : trois plans dans l'espace	10
4.3	Exemple : deux plans dans l'espace	10

Chapitre 11

Systèmes linéaires

Pour ce chapitre $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, n, p, q, r désigneront des entiers naturels non nuls.

1 Matrices et systèmes linéaires

1.1 Généralités

Définitions 1.1 (Matrice).

- (i) On appelle **matrice de taille** $n \times p$ à **coefficients dans** $\mathbf{K}$ toute famille A de $n \times p$ nombres de $\mathbf{K}$ écrite sous la forme d'un tableau : $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ce qui donne explicitement :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

La matrice $(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ip})$ est appelée la $i^{\text{ème}}$ ligne de A .

La matrice $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ est appelée la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

Le nombre a_{ij} est le coefficient de A situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

- (ii) L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
- (iii) Pour $n = p$ on dit que la matrice est **carrée**. L'ensemble des matrices carrées est noté $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
- (iv) Pour $p = 1$ on dit que la matrice est une matrice **colonne** de taille n .
- (v) Pour $n = 1$ on dit que la matrice est une matrice **ligne** de taille p .

Remarques.

- On utilise de préférence i pour les lignes et j pour les colonnes.
- On note suivant les cas a_{ij} ou A_{ij} le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne d'une matrice A .

Définitions 1.2 (Équation linéaire, système linéaire).

(i) *Système linéaire*

On appelle **système d'équations linéaires** à p inconnues et n équations tout système du type :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,j}x_j + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,j}x_j + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,j}x_j + \dots + a_{i,p}x_p = b_i & (L_i) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,j}x_j + \dots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Les nombres $a_{i,j} \in \mathbf{K}$, où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, sont appelés **coefficients** du système.

Les nombres $b_i \in \mathbf{K}$, où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, forment le **second membre** du système.

Les nombres x_j , où $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, sont les **inconnues** du système.

(ii) *Système homogène*

Lorsque tous les b_i sont nuls on dit que le système est **homogène**.

Dans le cas général à tout système (S) est associé le **système homogène associé**, noté (S_0) , qui les mêmes coefficients que (S) et un second membre nul.

(iii) On appelle **solution** de (S) tout p -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p$ qui vérifie les n équations linéaires.

Résoudre (S) consiste à trouver l'ensemble des p -uplets solutions.

Exemple 1.1. Soit le système $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \\ 7x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$.

Alors $(1, 0, 1)$ est une solution du système, c'est-à-dire $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ conviennent. Par contre, $(-2, 3, 1)$ ne satisfait que la première équation. Ce n'est donc pas une solution du système.

Définition 1.1 (Écriture matricielle).

Soit (S) le système linéaire :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

- (i) La **matrice associée** au système linéaire (S) de la définition 1.2 est la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

On pose alors les inconnues et le second membre sous la forme de matrices colonnes :
Et alors le système est équivalent à $AX = B$, avec :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$$

- (ii) La **matrice augmentée** associée à un système est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbf{K})$ formée par les coefficients de A auxquels on rajoute en dernière colonne le second membre.
On la note $A|B$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array} \right)$$

Exemple 1.2.

Écrire le système suivant sous forme matricielle. Donner la matrice augmentée du système.

$$(S) \begin{cases} 2x + 3y - 2z + t = 5 \\ \quad 2y - z + t = 1 \\ x + 3y + 7z = -3 \end{cases}$$

1.2 Opérations élémentaires

Définitions 1.3 (Opérations sur les lignes).

On définit les trois opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire ou d'une matrice :

- (i) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: multiplier une ligne par un scalaire λ non nul.
- (ii) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbf{K}$ (et $j \neq i$) : ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j .
- (iii) $L_i \leftrightarrow L_j$: échanger deux lignes.

Définitions 1.4 (Systèmes équivalents - Matrices équivalentes).

- (i) Deux systèmes linéaires sont dits **équivalents** si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.
- (ii) Deux matrices A et A' sont dites **équivalentes par lignes** si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes et on note $A \underset{L}{\sim} A'$.

Théorème 1.1 (Solutions de systèmes équivalents).

Deux systèmes linéaires équivalents ont le même ensemble de solutions.

Autrement dit, les trois opérations élémentaires de la définition 1.3 ne changent pas les solutions d'un système linéaire.

Remarque. Ainsi pour résoudre un système linéaire donné, on se ramène à un système équivalent dont la résolution sera plus simple que celle du système de départ.

Proposition 1.1 (Matrices augmentées de systèmes équivalents).

Si on passe d'un système (S_1) à un système (S_2) par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, alors la matrice augmentée de (S_2) s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur les lignes sur la matrice augmentée de (S_1) .

Remarque. Cette proposition nous permet d'utiliser les matrices augmentées dans la résolution d'un système linéaire.

2 Algorithme du pivot de Gauss-Jordan

2.1 Échelonnement

Définition 2.1 (Matrice échelonnée).

Une matrice est dite **échelonnée par lignes** si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- (i) Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;
- (ii) À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Exemples 2.1.

1. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée par lignes car la deuxième condition n'est pas vérifiée. En effet, le premier élément non-nul de la 3^{ème} ligne n'est pas situé à droite (mais en même position) que le premier élément non-nul de la 2^{ème} ligne.

2. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée par lignes.

Définition 2.2 (Pivot).

On appelle **pivot** d'une matrice échelonnée par ligne, le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Exemple 2.2. les pivots de la matrice échelonnée par ligne vue dans l'exemple 2.1 sont : 2, 3, 7, 5.

Définition 2.3 (Matrice échelonnée réduite).

Une matrice échelonnée en lignes est dite **échelonnée réduite par lignes** si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Exemples 2.3.

1. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont échelonnées réduites par lignes.

2. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas échelonnées réduites par lignes.

Théorème 2.1 (Admis).

Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

2.2 Pratique de l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Cet algorithme, facilement programmable (voir TP sur Python), permet de transformer un système en un système équivalent dont la matrice est échelonnée réduite par lignes. L'existence et l'unicité d'un tel système sont assurées par le théorème 2.1.

L'avantage d'un tel système est qu'il est facile à résoudre en « remontant les équations ».

Nous allons voir cet algorithme sur un exemple précis. Ce processus se déroule en trois temps : échelonnement de la matrice augmentée, passage à une matrice échelonnée réduite par lignes, puis enfin résolution.

Exemple 2.4.

Soit le système suivant à résoudre :

$$(S) : \begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

La matrice augmentée associée au système est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

1) **Passage à une forme échelonnée.**

- Pour appliquer la méthode du pivot de Gauss, il faut d'abord que le premier coefficient de la première ligne soit non nul. Comme ce n'est pas le cas ici, on échange les deux premières lignes par l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

- Le pivot $\textcircled{1}$ sert pour éliminer tous les autres termes sur la même colonne. Faisons disparaître le terme -1 de la troisième ligne - première colonne ; pour cela on fait l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

- On passe à la ligne 2, on prend le pivot $\textcircled{1}$ de la ligne 2 et à l'aide des opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ on annule les éléments de la colonne 2 :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 2 \end{array} \right) \text{ donne } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -2 & -4 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 6 \end{array} \right).$$

- On passe à la ligne 3, on prend le pivot $\textcircled{3}$ de la ligne 3 et à l'aide des opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ et $L_1 \leftarrow 3L_1 - 8L_3$ les éléments de la colonne du pivot sont annulés :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} & 2 & 6 \end{array} \right) \text{ donne } \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & -22 & -60 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 6 \end{array} \right).$$

La matrice augmentée est maintenant sous forme échelonnée par lignes.

2) Passage à une forme réduite.

Il reste maintenant à mettre la matrice sous la forme échelonnée réduite par lignes. Pour cela, effectue les opérations élémentaires suivantes $L_1 \leftarrow L_1/3$ et $L_3 \leftarrow L_3/3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -22/3 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2 \end{array} \right).$$

La matrice est bien est sous forme échelonnée réduite par lignes.

3) Résolution.

Le système (S) est donc équivalent au système :

$$(S) : \begin{cases} x_1 & & - \frac{22}{3}x_4 & = & -20 \\ & x_2 & - 3x_4 & = & -10 \\ & & x_3 + \frac{2}{3}x_4 & = & 2 \end{cases}$$

Le système est maintenant simple à résoudre. En choisissant x_4 comme variable libre, on peut exprimer x_1, x_2, x_3 en fonction de x_4 :

$$x_1 = -20 + \frac{22}{3}x_4, \quad x_2 = 3x_4 - 10, \quad x_3 = 2 - \frac{2}{3}x_4.$$

Ce qui permet d'obtenir toutes les solutions du système (S) :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-20 + \frac{22}{3}x_4, 3x_4 - 10, 2 - \frac{2}{3}x_4, x_4 \right) \mid x_4 \in \mathbf{R} \right\}.$$

3 Résolution d'un système linéaire

On souhaite répondre à la question de savoir si les solutions existent et de savoir la forme des solutions en cas d'existence.

Dans le cas où il y a une infinité de solutions, certaines des variables jouent un rôle particulier. Combien de variables jouent un tel rôle ?

3.1 Différents types de systèmes

Définition 3.1 (Systèmes compatibles - Systèmes incompatibles).

Un système est dit **compatible** lorsqu'il possède au moins une solution.

Un système est dit **incompatible** lorsqu'il ne possède pas de solution.

Exemples 3.1.

Le système $(S) : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ est incompatible, alors que le système $(S') : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ est compatible.

Voici un résultat théorique important pour les systèmes linéaires.

Théorème 3.1 (Solutions d'un système linéaire).

Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.

3.2 Systèmes homogènes

Un cas particulier important est celui des **systèmes homogènes**, pour lesquels $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, c'est-à-dire dont le second membre est nul. De tels systèmes sont toujours compatibles car ils admettent toujours la solution $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$. Cette solution est appelée *solution triviale*.

Le fait que l'on puisse toujours se ramener à un système échelonné réduit implique le résultat suivant :

Théorème 3.2 (Solutions d'un système homogène).

Tout système homogène d'équations linéaires dont le nombre d'inconnues est strictement plus grand que le nombre d'équations a une infinité de solutions.

3.3 Structure des solutions

Définitions 3.1 (Rang d'une matrice / d'un système linéaire).

- (i) On appelle **rang** d'une matrice M , noté $\text{rg}(M)$ le nombre de pivots obtenus après réduction de M en matrice échelonnée par lignes.
- (ii) On appelle **rang** d'un système linéaire S , noté $\text{rg}(S)$ le rang de sa matrice associée.

Exemple 3.2.

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 \text{ et } \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5.$$

Remarque. Il découle de la définition 3.1 que le rang d'une matrice est inférieur ou égal au nombre de lignes et au nombre des colonnes.

De même, le rang d'un système linéaire est plus petit ou égal au nombre d'équations et au nombre d'inconnues.

Définitions 3.2 (Inconnues principales et secondaires).

Soit (S) un système linéaire à p inconnues de rang r dont la matrice associée est échelonnée par lignes.

- (i) On appelle **inconnues principales** les inconnues correspondant aux colonnes contenant les pivots.
- (ii) On appelle **inconnues secondaires** ou **paramètres** les inconnues restantes.

Exemple 3.3. Pour le système (S)

$$(S) : \begin{cases} x_1 & & -\frac{22}{3}x_4 & = & -20 \\ & x_2 & -\frac{3}{2}x_4 & = & -10 \\ & & x_3 + \frac{2}{3}x_4 & = & 2 \end{cases}$$

x_1, x_2 et x_3 sont les 3 **inconnues principales** du système (S) et x_4 est l'**inconnue secondaire**, on dit aussi que x_4 est un **paramètre** de (S) .

Théorème 3.3 (Structure des solutions d'un système linéaire).

Le nombre de paramètres est égal à la différence du nombre d'inconnues et du rang.

Proposition 3.1 (Structure des solutions d'un système linéaire homogène).

Soit (S) un système linéaire homogène à p inconnues, de rang $r < p$. Alors (S) admet une infinité de solutions qui s'expriment à l'aide de $p - r$ paramètres.

Remarque. Si $r = p$, le système linéaire homogène (S) admet une seule solution : la solution triviale $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$.

Exemple 3.4. Pour le système (S)

$$(S) : \begin{cases} x_1 & - 2x_3 + x_4 & = & 0 \\ & x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{cases}$$

x_1 et x_2 sont les **inconnues principales** du système (S) et x_3, x_4 sont les **paramètres**.

Le système homogène (S) qui est de rang 2 admet une infinité de solutions, ces solutions s'expriment à l'aide des paramètres x_3 et x_4 . Les solutions du système (S) :

$$S = \{(2x_3 - x_4, x_3 - 3x_4, x_3, x_4) / (x_3, x_4) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Théorème 3.4 (Structure des solutions d'un système linéaire).

Les solutions d'un système linéaire compatible s'obtiennent en additionnant une solution particulière à toutes les solutions du système homogène associé.

Exemple 3.5. Soit le système (S)

$$(S) : \begin{cases} x_1 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 11 \end{cases}.$$

On remarque que $(1, 2, 3, 4)$ est une solution particulière de S , alors les solutions du système (S) :

$$S = \{(2x_3 - x_4 + 1, x_3 - 3x_4 + 2, x_3 + 3, x_4 + 4) / (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\}.$$

4 Applications à la géométrie

4.1 Exemple : deux droites dans le plan

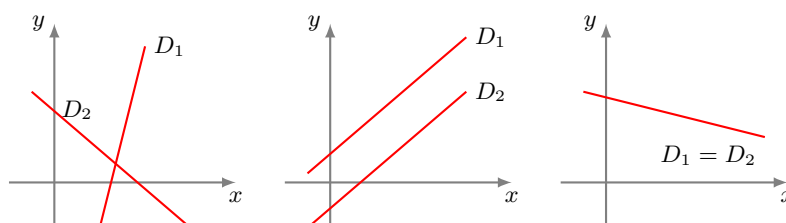
L'équation d'une droite dans le plan (Oxy) s'écrit $ax + by = c$ où a, b et c sont des paramètres réels, a et b n'étant pas simultanément nuls. Cette équation s'appelle **équation linéaire** dans les variables (ou inconnues) x et y .

Considérons maintenant deux droites D_1 et D_2 et cherchons les points qui sont simultanément sur ces deux droites. Un point (x, y) est dans l'intersection $D_1 \cap D_2$ s'il est solution du système :

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Trois cas se présentent alors :

1. Les droites D_1 et D_2 se coupent en un seul point. Dans ce cas, illustré par la figure de gauche, le système (S) a une seule solution.
2. Les droites D_1 et D_2 sont parallèles. Alors le système (S) n'a pas de solution cela correspond à un système incompatible. La figure du centre illustre cette situation.
3. Les droites D_1 et D_2 sont confondues et, dans ce cas, le système (S) a une infinité de solutions.



Proposition 4.1 (intersection de 2 droites du plan).

Soient deux droites du plan d'équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$. On leur associe le système (S) .

- (i) Si $\text{rg}(S) = 2$, alors (S) admet une unique solution ;
- (ii) si $\text{rg}(S) = 1$, alors (S) est soit incompatible soit admet une infinité de solutions s'exprimant à l'aide d'un seul paramètre.

4.2 Exemple : trois plans dans l'espace

Dans l'espace $(Oxyz)$, une équation linéaire est l'équation d'un plan :

$$ax + by + cz = d$$

(on suppose ici que a , b et c ne sont pas simultanément nuls).

L'intersection de trois plans dans l'espace correspond au système suivant à 2 équations et à 3 inconnues :

$$(S) : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Cinq cas de figures se présentent alors :

- deux des 3 plans sont sécants en une droite qui coupent le troisième plan en un point ;
- deux des 3 plans sont sécants en une droite qui est contenue dans troisième plan et le système admet une infinité de solutions qui s'expriment à l'aide d'un seul paramètre ;
- deux des 3 plans sont sécants en une droite qui est strictement parallèle au troisième plan et le système est incompatible ;
- les 3 plans sont parallèles dont au moins deux sont strictement parallèles, le système (S) est donc incompatible ;
- les 3 plans sont confondus et il y a une infinité de solutions qui s'expriment à l'aide de 2 paramètres.

Proposition 4.2 (intersection de 3 plans de l'espace).

Soient trois plans de l'espace d'équations :

$$ax + by + cz = d, \quad a'x + b'y + c'z = d' \quad \text{et} \quad a''x + b''y + c''z = d'',$$

et (S) le système associé.

- (i) Si $\text{rg}(S) = 3$, alors (S) admet une unique solution ;
- (ii) si $\text{rg}(S) = 2$, alors (S) est soit incompatible soit admet une infinité de solutions s'exprimant à l'aide d'un seul paramètre ;
- (iii) si $\text{rg}(S) = 1$, alors (S) est soit incompatible soit admet une infinité de solutions s'exprimant à l'aide de 2 paramètres.

4.3 Exemple : deux plans dans l'espace

Dans l'espace $(Oxyz)$, une équation linéaire est l'équation d'un plan :

$$ax + by + cz = d$$

(on suppose ici que a , b et c ne sont pas simultanément nuls).

L'intersection de deux plans dans l'espace correspond au système suivant à 2 équations et à 3 inconnues :

$$(S) : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Trois cas se présentent alors :

- les plans sont parallèles (et distincts) et il n'y a alors aucune solution au système,
- les plans sont confondus et il y a une infinité de solutions au système,
- les plans se coupent en une droite et il y a une infinité de solutions.

Proposition 4.3 (intersection de 2 plans de l'espace).

Soient deux plans de l'espace d'équations :

$$ax + by + cz = d, \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c'y = d',$$

et (S) le système associé.

- (i) Si $\text{rg}(S) = 2$, alors (S) est soit incompatible soit admet une infinité de solutions s'exprimant à l'aide d'un seul paramètre;
- (ii) si $\text{rg}(S) = 1$, alors (S) est soit incompatible soit admet une infinité de solutions s'exprimant à l'aide de 2 paramètres.

Exemple 4.1.

Étudions l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 2y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 2y + z = 4 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 2y + z = 4 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 4 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ 6x + 4y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 6x + 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

