TD 12 : Suites numériques

Exercice 1

Étudier la monotonie, puis la convergence des suites suivantes :

1/ (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \times n}$.

2/ (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $w_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$.

Exercice 2

1/ Montrer que pour tout réel positif x, on a $x - x^2/2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2/ Soient $a > 0, n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{ka}{n^2}\right)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.

Exercice 3

1/ Montrer que, si une suite (x_n) est convergente alors la suite $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers 0.

2/ Énoncer la contraposée du précédent résultat.

3/ En déduire que la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$ est divergente.

Exercice 4

Étudier la convergence des suites (u_n) définies par :

1/ $u_0 = \sqrt{3}$ et $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

2/ $u_0 = 2$ et $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2u_n}$.

Exercice 5

Pour les suites suivantes définies par récurrence, déterminer l'expression de u_n en fonction de n, puis étudier la convergence.

1/ $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_{n+1} = 2u_n + 1$

2/ $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{5}$

3/ $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

4/ $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n$

5/ $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2$

6/ $u_0 = v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + 2v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$ (il faut aussi calculer v_n).

Exercice 6

1/ Montrer que les suites $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ sont adjacentes.

2/ Montrer à l'aide d'un graphique que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ln(2) \leqslant v_n$.

3/ Écrire un script en Python permettant d'avoir une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} près, p étant lu au clavier.

Exercice 7

On considère la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

1/ Montrer que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes .

2/ En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et donner une valeur approchée de sa limite à 0,1 près (On écrira un programme en Python permettant d'avoir une valeur approchée à 10^{-p} près, p étant lu au clavier).

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie par : $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$.

1/ Étudier les suites de termes généraux : $v_n = u_{2n}$et $w_n = u_{2n+1}$

2/ La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est-elle convergente ?

Exercice 9

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\quad \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente puis déterminer sa limite .

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\in N*}$ la suite définie par $0 < u_1 < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$

1/

a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, 0 < u_n < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) Étudier la monotonie de (u_n), en déduire que (u_n) converge puis déterminer sa limite.

2/ On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ pour $n \geqslant 1$.

a) Montrer que la suite de terme général $V_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Soit $n \geqslant 1$. Comparer $\dfrac{2}{1-2u_1^2}$ et $\dfrac{2}{1-2u_n^2}$.

c) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $v_n \leqslant \dfrac{2}{1-2u_1^2} u_n$ et en déduire la limite de la suite de terme général $S_n = u_1 + u_2 + .. + u_n$.

3/ (question indépendante du **2/**)

Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $w_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ converge vers 4.