TD 3 : Sommes - Produits

Exercice 1 Sommes

Soient n et p des entiers naturels avec $p < n$, $\lambda, a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres complexes. Simplifier les expressions suivantes :

1/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k = \ldots$

2/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \ldots$

3/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \ldots$

4/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda = \ldots$

5/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k+p} = \ldots$

Solution:

a) $\forall l \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (n > n_0 \text{ et } |u_n - l| \geqslant \varepsilon)$.

b) $\exists n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$.

c) $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n| > M$.

d) $\forall a > 0, \forall b \geqslant 0, \exists n \in \mathbb{N},\ na \geqslant b$.

Exercice 2 Vrai-faux sur les sommes

Déterminer si les égalités suivantes sont vraies ou fausses, si elles sont fausses corriger le membre de droite :

1/ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{n-i} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$

2/ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{2i+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} a_k$

3/ $\displaystyle\sum_{i=5}^{67} a_k = 62 a_k$

4/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k$

5/ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$

6/ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_{i+2} - a_i) = a_{n+2} - a_1$

7/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_{2i} + \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1}$

8/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_{2i} + \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1}$

9/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}) = 0$

Exercice 3 Sommes télescopiques

On pose pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ où les coefficients a_k de f sont des réels.

On définit la dérivée de la fonction f par : $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

Exprimer les expressions suivantes sous la forme $\displaystyle\sum_{k=p}^{N} b_k x^k$ où il faut préciser les entiers p, N et le coefficient b_k en fonction des coefficients de f.

1/ $f'(x)$

2/ $f'(x) - f(x)$

3/ $f''(x) - 2f'(x) + f(x)$

4/ $f''(x) - f(x)$

5/ $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x)$

Exercice 4 Changement d'indice dans les sommes

Dans les sommes, effectuer les changements d'indices proposés :

1/ $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i+1}$ en posant $j = i + 1$

2/ $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k-1) \sin^{k+1}(x)$ en posant $j = k + 1$

3/ $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left((n-k)\theta\right)$ en posant $j = n-k$

Exercice 5 **Sommes et produits télescopiques**

Simplifier le plus possible les sommes ou les produits suivants :

1/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k(1-q)$ **2/** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ **3/** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$ **4/** $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

5/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ en transformant $\dfrac{1}{k(k+1)}$ sous la forme $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$ avec a et b constantes réelles.

Exercice 6 **Calculs de sommes d'entiers**

1/ Démontrer par récurrence que :

a) $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, b) $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2/ En déduire la valeur de $T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

Exercice 7 **Changement d'indice**

Pour $p \in \{1,2,3\}$ on note $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$.

1/ A l'aide du changement d'indice $i = n-k$ dans S_1, calculer S_1.

2/ Faire de même avec S_2. Que se passe-t-il ?

3/ Faire de même avec S_3 pour l'exprimer en fonction de n et S_2.

4/ En utilisant l'exercice précédent, calculer S_3.

Exercice 8 **Somme double**

Pour calculer des sommes portant sur deux indices, on a intérêt à représenter la zone du plan couverte par ces indices et à sommer en lignes, colonnes ou diagonales... Calculer :

1/ $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij.$

2/ $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i(j-1).$

3/ $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i-1)j.$

4/ $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (n-i)(n-j).$

5/ $\displaystyle\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n} (p+q)^2$ (on posera $k = p+q$).

Exercice 9 **Formule du binôme**

1/ Vérifier la formule du binôme de Newton pour $n \in [\![0,3]\!]$.

2/ Développer $(1+x)^3$ et $(1+\mathrm{i})^7$ (où i complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$).

3/ En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k3^{n-k}$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^{k+1}}{3^{n+k}}$

Exercice 10 **Formule du binôme**

Démontrer que $\displaystyle\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{p}{k}\binom{n}{p}$ (pour $0 \leq k \leq p \leq n$). En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=2^p\binom{n}{p}.$$