TD 3 : Sommes - Produits

Exercice 1 Sommes

Soient n et p des entiers naturels avec $p < n$, $\lambda, a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres complexes. Simplifier les expressions suivantes :

1/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k = \dots$

2/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \dots$

3/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \dots$

4/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda = \dots$

5/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k+p} = \dots$

Solution:

1/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$

2/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$

3/ $\displaystyle\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$

4/ $n\lambda$

5/ $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{p+n} a_k$

Exercice 2 Vrai-faux sur les sommes

Déterminer si les égalités suivantes sont vraies ou fausses, si elles sont fausses corriger le membre de droite :

1/ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{n-i} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$

2/ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{2i+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} a_k$

3/ $\displaystyle\sum_{i=5}^{67} a_k = 62 a_k$

4/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k$

5/ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$

6/ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_{i+2} - a_i) = a_{n+2} - a_1$

7/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_{2i} + \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1}$

8/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_{2i} + \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1}$

9/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}) = 0$

Solution:

1/ Vraie

2/ Fausse, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum_{i=1}^{n} a_{2i}$

3/ Fausse, $63 a_k$

4/ Vraie

5/ Vraie

6/ Fausse, $a_{n+2} + a_{n+1} - a_1 - a_2$

7/ Vraie

8/ Faux, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{2i} + \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1}$

9/ Faux, $a_0 - a_1 - a_n + a_{n+1}$

Exercice 3 Sommes télescopiques

On pose pour tout réel x, $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ où les coefficients a_k de f sont des réels.

On définit la dérivée de la fonction f par : $\displaystyle f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

Exprimer les expressions suivantes sous la forme $\sum_{k=p}^{N} b_k x^k$ où il faut préciser les entiers p, N et le coefficient b_k en fonction des coefficients de f.

1/ $f'(x)$

2/ $f'(x) - f(x)$

3/ $f''(x) - 2f'(x) + f(x)$

4/ $f''(x) - f(x)$

5/ $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x)$

Solution:

1/ $f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}x^k$

2/ $f'(x) - f(x) = -a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \left((k+1)a_{k+1} - a_k\right) x^k$

3/ $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = a_n x^n + (a_{n-1} - 2na_n)x^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \left((k+1)(k+2)a_{k+2} - 2(k+1)a_{k+1} + a_k\right) x^k$

4/ $f''(x) - f(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \left((k+1)(k+2)a_{k+2} - a_k\right) x^k$

5/ $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 2a_n x^n + (a_{n-1} - 3na_n)x^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \left((k+1)(k+2)a_{k+2} - 3(k+1)a_{k+1} + 2a_k\right) x^k$

Exercice 4 Changement d'indice dans les sommes

Dans les sommes, effectuer les changements d'indices proposés :

1/ $A = \sum_{i=1}^{n} a_{i+1}$ en posant $j = i + 1$

2/ $B = \sum_{k=0}^{n-1} (k-1)\sin^{k+1}(x)$ en posant $j = k + 1$

3/ $C = \sum_{k=0}^{n} \sin\left((n-k)\theta\right)$ en posant $j = n - k$

Solution:

1/ $A = \sum_{j=2}^{n+1} a_j$

2/ $B = \sum_{j=1}^{n} (j-2)\sin^j(x)$

3/ $C = \sum_{j=0}^{n} \sin(j\theta)$

Exercice 5 Sommes et produits télescopiques

Simplifier le plus possible les sommes ou les produits suivants :

1/ $\sum_{k=0}^{n} q^k(1-q)$

2/ $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

3/ $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

4/ $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

5/ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ en transformant $\frac{1}{k(k+1)}$ sous la forme $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ avec a et b constantes réelles.

Solution:

1/ $1-q^{n+1}$ **2/** $\ln(n+1)$ **3/** $n+1$ **4/** $\dfrac{n+1}{2n}$ **5/** $\dfrac{n}{n+1}$

Exercice 6 **Calculs de sommes d'entiers**

1/ Démontrer par récurrence que :

a) $S_2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, b) $S_3=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2/ En déduire la valeur de $T=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

Solution:
2/ $T=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Exercice 7 **Changement d'indice**

Pour $p\in\{1,2,3\}$ on note $S_p=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^p$.

1/ A l'aide du changement d'indice $i=n-k$ dans S_1, calculer S_1.

2/ Faire de même avec S_2. Que se passe-t-il ?

3/ Faire de même avec S_3 pour l'exprimer en fonction de n et S_2.

4/ En utilisant la question précédente, calculer S_3.

Solution:

1/ $S_1=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(n-i)=\sum_{i=0}^{n}n-\sum_{i=0}^{n}i=n(n+1)-S_1$, d'où $S_1=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2/ $S_2=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(n-i)^2=\sum_{i=0}^{n}n^2-2nS_1+\sum_{i=0}^{n}i^2=0+S_2$, On ne peut pas donc calculer S_2 à l'aide de ce changement d'indice.

3/ $S_3=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(n-i)^3=\sum_{i=0}^{n}n^3-3n^2\sum_{i=0}^{n}i+3n\sum_{i=0}^{n}i^2-\sum_{i=0}^{n}i^3=(n+1)n^3-3n^2S_1+3nS_2-S_3$, on en déduit que $S_3=\dfrac{(n+1)n^3-3n^2S_1+3nS_2}{2}$.

4/ En utilisant la question précédente, on trouve $S_3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 8 **Somme double**

Pour calculer des sommes portant sur deux indices, on a intérêt à représenter la zone du plan couverte par ces indices et à sommer en lignes, colonnes ou diagonales... Calculer :

1/ $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij.$

2/ $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i(j-1).$

3/ $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i-1)j.$

4/ $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (n-i)(n-j).$

5/ $\displaystyle\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n} (p+q)^2$ (on posera $k=p+q$).

Solution:

1/ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=i}^{n} j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(i\frac{(n+i)(n-i+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.$

2/ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^{n}(j-1)\right)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\frac{(n-i)(n+i-1)}{2}\right)=\frac{n(n-1)(n+1)(3n-2)}{24}.$

3/ $\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j-1}(i-1)\right)=\sum_{j=2}^{n}\left(j\frac{(j-2)(j-1)}{2}\right)=\frac{n(n-2)(n-1)(n+1)}{8}.$

4/ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left((n-i)\sum_{j=i}^{n}(n-j)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left((n-i)\frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\right)=\frac{n(n-1)(n+1)(3n-2)}{24}.$

5/ $\displaystyle\frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}\ .$

Exercice 9 — Formule du binôme

1/ Vérifier la formule du binôme de Newton pour $n\in[\![0,3]\!]$.

2/ Développer $(1+x)^3$ et $(1+\mathrm{i})^7$ (où i complexe tel que $\mathrm{i}^2=-1$).

3/ En utilisant la fonction $x\mapsto(1+x)^n$, calculer :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k3^{n-k}$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^{k+1}}{3^{n+k}}$

Solution:

1/ $(a+b)^0=1$, $(a+b)^1=a+b$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

2/ $(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$ et $(1+\mathrm{i})^7=8-8\,\mathrm{i}$.

3/

a) 0

b) $n2^{n-1}$

c) $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

d) 5^n

e) 3^n

f) $\dfrac{2\times5^n}{9^n}$