TD 25 : Probabilités

Exercice 1

Une urne, dont on ne peut pas distinguer le contenu, contient 4 boules vertes et 6 boules rouges indiscernables au toucher.

1/ On tire successivement 2 boules dans l'urne, sans remise.

2/ Déterminer la probabilité d'obtenir une seule boule verte.

3/ Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux boules de la même couleur.

4/ Déterminer la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur.

5/ On tire successivement 2 boules dans l'urne, avec remise.

Répondre aux mêmes questions que dans 1.

6/ On tire simultanément 2 boules dans l'urne.

Répondre aux mêmes questions que dans 1.

Exercice 2

On constate sur un dé à six faces que le 1 est obtenu 2 fois plus souvent que le 2 qui lui-même est obtenu 2 fois plus souvent que 3,4,5 et 6.

Quelle probabilité faudrait-il associer à $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pour modéliser l'expérience ?

Exercice 3

On lance un dé à six faces parfaitement équilibré plusieurs fois de suite.

Combien de lancés faut-il pour avoir 80% de chance d'obtenir un 6 ?

Exercice 4

Dans une course à 15 participants, des paris se font sur un participant. Le pari est gagné lorsque le participant fait partie des 3 premiers. Quelle est la probabilité en effectuant deux paris de gagner ?

Exercice 5

Monsieur Météo sort avec son parapluie chaque fois qu'il prédit de la pluie.

Sachant que dans sa région il pleut 3 jours sur 10, qu'il se trompe en prédisant de la pluie alors qu'il ne pleut pas 15 fois sur 100, qu'il réussit à prédire les jours de pluie 9 fois sur 10, quelle est la probabilité qu'il n'emporte pas son parapluie alors qu'il va pleuvoir ?

Exercice 6

On tire simultanément 4 cartes dans un jeu classique de 32 cartes. Déterminer la probabilité d'obtenir :

1/ un carré ;

2/ un brelan ;

3/ une paire.

Exercice 7

On considère une maladie dont 5% des personnes atteintes ne guérissent pas. On observe trois malades.

Quelle est la probabilité que les trois patients guérissent ? Qu'aucun ne guérisse ? Qu'au moins un des trois ne guérisse pas ?

Exercice 8

On tire successivement et sans remise 3 boules dans une urne, dont on ne peut pas distinguer le contenu, contenant 6 boules rouges et 4 boules bleues indiscernables au toucher.

1/ Déterminer la probabilité de tirer au moins une boule bleue.

2/ Sachant qu'au moins une boule bleue a été tirée, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit bleue ?

Exercice 9

Dans une population 1 personne sur 100000 souffre d'une maladie.Un test permet de détecter la maladie chez 99% des malades et donne un résultat positif chez 0,01% des non malades.

Quelle est la probabilité d'être positif au test sans être malade ? Discuter de la pertinence d'une campagne de dépistage.

Exercice 10 **Paradoxe des prisonniers ou problème de Monty-Hall**

Problème issu d'un jeu télévisé. Un joueur est placé devant trois portes closes, il doit en désigner une.

Derrière une porte se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres portes se trouve une chèvre.

Ensuite un présentateur (qui connait la bonne porte) ouvre une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle derrière laquelle se trouve la voiture.

Le joueur peut alors conserver sa porte choisie initialement ou choisir la porte restante.

Quelle est le choix à faire pour avoir le plus de chance de gagner la voiture ?

Solution:

Exercice 1

Une urne, dont on ne peut pas distinguer le contenu, contient 4 boules vertes et 6 boules rouges indiscernables au toucher.

1. On a équiprobabilité de tirage de chacune des boules.

   (a) On peut :

   - tirer une boule verte puis une boule rouge, probabilité : $\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$
   - tirer une boule rouge puis une boule verte, probabilité : $\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$

   Les évènements sont incompatibles, on peut additionner les probabilités, d'où la probabilité de tirer une seule boule verte : $\frac{8}{15}$

   (b) On peut :

   - tirer deux boules rouges, probabilité : $\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{15}$
   - tirer deux boules vertes, probabilité : $\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

   Probabilité de tirer deux boules de la même couleur : $\frac{7}{15}$

(c) C'est la même chose que a. !

2. (a) On peut :

   - tirer une boule verte puis une boule rouge, probabilité : $\frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{6}{25}$
   - tirer une boule rouge puis une boule verte, probabilité : $\frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{6}{25}$

   Les évènements sont incompatibles, on peut additionner les probabilités, d'où la probabilité de tirer une seule boule verte : $\frac{12}{25}$

   (b) On peut :

   - tirer deux boules rouges, probabilité : $\frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{25}$
   - tirer deux boules vertes, probabilité : $\frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{25}$

   Probabilité de tirer deux boules de la même couleur : $\frac{13}{15}$

   (c) C'est la même chose que a.

3. Il n'y a pas d'ordre, mais on devrait retrouver les mêmes résultats que dans 1. où l'ordre ne jouait pas.

   (a) Probabilité de tirer une seule boule verte : $\frac{\binom{4}{1} \times \binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{4 \times 6}{5 \times 9} = \frac{12}{15}$

   (b) Probabilité de tirer deux boules de la même couleur : $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{13}{15}$

   (c) C'est la même chose que a.

Exercice 2

On constate sur un dé à six faces que le 1 est obtenu 2 fois plus souvent que le 2 qui lui-même est obtenu 2 fois plus souvent que 3,4,5 et 6.

Quelle probabilité faudrait-il associer à $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pour modéliser l'expérience ?

Fixons x la probabilité d'obtenir 3.

Alors 4,5 et 6 doivent avoir la même probabilité que 3.

2 doit avoir une probabilité $2x$ d'être obtenu.

1 doit avoir une probabilité $4x$ d'être obtenu.

La somme des probabilités des évènements élémentaires vaut 1, d'où : $4x + 2x + x + x + x + x = 1$.

$x = \frac{1}{10}$ convient.

Exercice 3

On lance un dé à six faces parfaitement équilibré plusieurs fois de suite.

Combien de lancés faut-il pour avoir 80% de chance d'obtenir un 6 ?

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons A_n l'évènement : obtenir au moins un 6 avec n lancés.

L'évènement contraire $\overline{A_n}$ est : ne pas obtenir de 6 avec n lancés.

Probabilité de ne pas obtenir de 6 avec n lancés :

$P(\overline{A_n}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

On veut n tel que :

$$P(A_n) \geqslant 0,8 \iff 1 - P(\overline{A_n}) \geqslant 0,8 \iff \left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant 0,2 \iff n \geqslant \frac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

Il faut au moins 9 lancés.

Exercice 4

Dans une course à 15 participants, des paris se font sur un participant. Le pari est gagné lorsque le participant fait partie des 3 premiers. Quelle est la probabilité en effectuant deux paris de gagner ?

- Probabilité de gagner en pariant sur un participant, appelons le A : $\dfrac{\binom{3}{1}}{\binom{15}{1}} = \dfrac{3}{15}$

  Attention lorsque l'on parie sur un autre participant B, les évènements E_1 : « A gagnant », et E_2 : « B gagnant » ne sont pas disjoints !
- Probabilité que « A gagnant » et « B gagnant » :

  $P(E_1 \cap E_2) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{15}{2}} = \dfrac{1}{35}$
- Probabilité de gagner en effectuant deux paris :

  $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \dfrac{13}{35}$

Exercice 5

Monsieur Météo sort avec son parapluie chaque fois qu'il prédit de la pluie.

Sachant que dans sa région il pleut 3 jours sur 10, qu'il se trompe en prédisant de la pluie alors qu'il ne pleut pas 15 fois sur 100, qu'il réussit à prédire des jours sans pluie 9 fois sur 10, quelle est la probabilité qu'il n'emporte pas son parapluie alors qu'il va pleuvoir ?

On choisit un jour au hasard.

Notons A l'évènement : monsieur météo a prévu de la pluie ce jour.

Notons B l'évènement : il pleut ce jour.

On veut :

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}|B)P(B)}{P(\overline{A}|B)P(B) + P(\overline{A}|\overline{B})P(\overline{B})} \text{ (formule de Bayes)}$$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{0,1 \times 0,3}{0,1 \times 0,3 + 0,85 \times 0,7}$$

$$P(B|\overline{A}) = 0,048$$

Monsieur météo a moins de 5% de ne pas prendre son parapluie alors qu'il va pleuvoir ce jour.

Remarque : on peut aussi faire un tableau pour résumer cela ...faites le pour voir.

Exercice 6

On tire simultanément 4 cartes dans un jeu classique de 32 cartes. Déterminer la probabilité d'obtenir :

1. $\dfrac{8 \times \binom{4}{4}}{\binom{32}{4}} = \dfrac{1}{4495}$

2. $\dfrac{8\times\binom{4}{3}\times\binom{28}{1}}{\binom{32}{4}}=\dfrac{14}{4495}$

3. $\dfrac{8\times\binom{4}{2}\times\binom{28}{2}}{\binom{32}{4}}=\dfrac{2268}{4495}$

Exercice 7

On considère une maladie dont 5% des personnes atteintes ne guérissent pas. On observe trois malades.

Quelle est la probabilité que les trois patients guérissent ? Qu'aucun ne guérisse ? Qu'au moins un des trois ne guérisse pas ?

- Probabilité que les 3 patients guérissent :

  $0,95^3=0,857375$

- Probabilité qu'aucun ne guérisse :

  $0,05^3=0,000125$

- Probabilité qu'au moins un des trois ne guérisse pas (c'est l'évènement contraire de : les 3 patients guérissent) :

  $1-0,95^3=0,142625$

Exercice 8

On tire successivement et sans remise 3 boules dans une urne, dont on ne peut pas distinguer le contenu, contenant 6 boules rouges et 4 boules bleues indiscernables au toucher.

1. Déterminer la probabilité de tirer au moins une boule bleue. Notons B l'évènement : tirer au moins une boule bleue.

   $P(B)=1-\dfrac{6}{10}\times\dfrac{5}{9}\times\dfrac{4}{8}=\dfrac{5}{6}$

2. Notons B_1 l'évènement : tirer une boule bleue en premier.

   $P(B_1|B)=\dfrac{P(B_1\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B_1)}{P(B)}$

   Et : $P(B_1)=\dfrac{4}{10}$

   $P(B_1|B)=\dfrac{12}{25}$

Exercice 9

Dans une population 1 personne sur 100000 souffre d'une maladie.Un test permet de détecter la maladie chez 99% des malades et donne un résultat positif chez 0,01% des non malades.

Quelle est la probabilité d'être positif au test sans être malade ? Discuter de la pertinence d'une campagne de dépistage.

On choisit une personne au hasard.

Notons M l'évènement : la personne choisie est malade.

Notons T l'évènement : le test sur la personne choisie est positif.

On veut :

$$P(\overline{M}|T)=\frac{P(T|\overline{M})P(\overline{M})}{P(T|\overline{M})P(\overline{M})+P(T|M)P(M)}$$

$$P(\overline{M}|T)\approx 0,91$$

Donc une campagne de dépistage donnerait 91% de faux positifs, ce qui n'est pas efficace.

Exercice 10

Méthode 1 :

En notant G l'événement « Le joueur gagne la voiture » et B celui « Le joueur avait choisi la bonne porte » on a, par la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G|B)P(B) + P(G|\overline{B})P(\overline{B}) \\ &= \frac{1}{3}P(G|B) + \frac{2}{3}P(G|\overline{B}) \end{aligned}$$

Dans la stratégie où le joueur ne change pas de porte, il gagne si et seulement s'il avait choisi initialement la bonne porte : $P(G|B) = 1$ et $P(G|\overline{B}) = 0$. Ainsi, $P(G) = \dfrac{1}{3}$.

Dans la stratégie où le joueur change de porte, il gagne si et seulement s'il avait choisi initialement la mauvaise porte :$P(G|B) = 0$ et $P(G|\overline{B}) = 1$. Ainsi, $P(G) = \dfrac{2}{3}$.

Méthode 2 :

Une application du théorème de Bayes au problème de Monty Hall pourrait être formulée ainsi :

Considérons le cas où la porte 3 a été choisie et aucune porte n'est encore ouverte. La probabilité que la voiture soit derrière la porte 2 $P(F_2)$ est de $1/3$, probabilité qui serait en outre exactement la même pour chaque porte.

La probabilité que le présentateur ouvre la porte 1 $P(O_1)$ est alors de $1/2$. En effet, le candidat ayant choisi la porte 3 et le présentateur sachant ce que cache chaque porte :

- Soit la voiture est derrière la porte 1 : le présentateur ouvrira la porte 2.
- Soit la voiture est derrière la porte 2 : le présentateur ouvrira la porte 1.
- Soit la voiture est derrière la porte 3 : le présentateur ouvrira la porte 1 ou le présentateur ouvrira la porte 2 (équiprobabilité 1/2).

La probabilité que le présentateur ouvre la porte 1 sachant que la voiture est derrière la porte 2 est donc $P(O_1|F_2) = 1$.

La possibilité que la voiture soit derrière la porte 2 sachant que le présentateur ouvre la porte 1 est donc :

$$P(F_2|O_1) = \frac{P(O_1|F_2)P(F_2)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{3} P(O_1|F_i)P(F_i)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$