Table des matières

Chapitre 7

Primitives

1 Généralités sur les primitives.

Définition 1.1 (Primitive).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une ***primitive*** *de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Exemple 1.1.

1. *Soit $I = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de f. La fonction définie par $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1$ est aussi une primitive de f.*
2. *Soit $I =]0, +\infty[$ et $g : I \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Alors $G : I \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \ln x$ est une primitive de g sur I. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $G + k$ est aussi une primitive de g.*
3. *$F_1 : x \mapsto x$; $F_2 : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$; $F_3 : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$; $F_4 : x \mapsto \sin x$; $F_5 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont respectivement des primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions :*

$$f_1 : x \mapsto 1;\ f_2 : x \mapsto x;\ f_3 : x \mapsto x^2;\ f_4 : x \mapsto \cos x;\ f_5 : x \mapsto \mathrm{e}^x\ .$$

4. *La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ admet une primitive sur $]0, +\infty[$ la fonction $F : x \mapsto 2\sqrt{x}$*

On se pose la question sur l'unicité de primitive d'une fonction donnée, d'où la proposition suivante :

Proposition 1.1 (Primitives d'une fonction).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Notations. On notera une primitive de f par $\displaystyle\int f(t)\ \mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int f(x)\ \mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int f(u)\ \mathrm{d}u$ (les lettres $t, x, u, \ldots$ sont des lettres dites *muettes*, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter une primitive simplement par $\displaystyle\int f$.

La proposition 1.1 nous dit que si F est une primitive de f alors il existe un réel k, tel que $F = \int f(t)\ \mathrm{d}t + k$.

Attention

$\int f(t)\ \mathrm{d}t$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$ alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ désigne un nombre réel. Plus précisément nous verrons que si F est une primitive de f alors :

$$\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a).$$

Proposition 1.2 (Condition initiale)**.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
Étant donné un réel x_0 de I et un réel quelconque y_0, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

1.1 Tableaux de primitives

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître. Le tableau de droite est celui des compositions, u représente une fonction de x.

Fonction : f	**Primitive** : F	I
$x^\alpha\ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1,1[$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

Fonction	**Primitive**
$\lambda u'\ (\lambda \in \mathbb{R})$	λu
$u' + v'$	$u + v$
$u'u^\alpha\ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u
$u' \operatorname{sh} u$	$\operatorname{ch} u$
$u' \operatorname{ch} u$	$\operatorname{sh} u$
$u' \sin u$	$-\cos u$
$u' \cos u$	$\sin u$
$u'(1+\tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin u$
$\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos u$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$

1.2 Relation primitive-intégrale

Théorème 1.1 (Théorème fondamental)**.**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a, c'est-à-dire F est dérivable, pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$ et $F(a) = 0$.
Par conséquent pour une primitive F quelconque de f :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Notation. On note $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Corollaire.
Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Corollaire.
Soit f une fonction de classe C^1 sur I c'est-à-dire dérivable et f' continue sur I, alors :

$$\forall x, a \in I,\ \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t = f(x) - f(a).$$

Exemples 1.2.

1. *Pour $f(x) = \mathrm{e}^x$ une primitive est $F(x) = \mathrm{e}^x$ donc*

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \big[\,\mathrm{e}^x\,\big]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = e - 1.$$

2. *Pour $g(x) = x^2$ une primitive est $G(x) = \dfrac{x^3}{3}$ donc*

$$\int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x = \big[\tfrac{x^3}{3}\big]_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$

3. $\displaystyle\int_0^\pi \cos t\ dt = \big[\sin t\big]_{t=0}^{t=\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0.$

Remarque.
Une fonction non continue n'admet pas forcément une primitive, par exemple $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0, \dfrac{1}{2}[$ et $f(x) = 1$ si $x \in [\dfrac{1}{2}, 1]$ n'a pas de primitive sur $[0, 1]$.

Attention
On évitera la notation $\displaystyle\int_a^x f(x)\ \mathrm{d}x$ où la variable x est présente à la fois aux bornes et à l'intérieur de l'intégrale. Mieux vaut utiliser la notation $\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^x f(u)\ \mathrm{d}u$ pour éviter toute confusion.

2 Techniques de calcul de primitives et d'intégrales.

2.1 Intégration par parties

Théorème 2.1. *(IPP.)*
Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$. On a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Méthode

L'utilisation de l'intégration par parties repose sur l'idée suivante :
on ne sait pas calculer directement l'intégrale d'une fonction f s'écrivant comme un produit $f(x) = u(x)v'(x)$ mais si l'on sait calculer l'intégrale de $g(x) = u'(x)v(x)$ (que l'on espère plus simple) alors par la formule d'intégration par parties on aura l'intégrale de f.

Exemples 2.1.

1. *Calculons* $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$.
2. *Calculons* $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$.
3. *Calculons* $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$.
4. *Calculons* $\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$.

2.2 Changement de variable

Théorème 2.2 (Changement de variable)**.**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f continue sur $\varphi(I)$, alors :

$$\forall a, b \in I,\ \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \times \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Méthode

Voici un moyen simple de s'en souvenir. On note $x = \varphi(t)$ alors par dérivation on obtient $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ donc $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. D'où la substitution

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 2.2. *Calculons la primitive* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ *(on pose $x = \varphi(t) = \sin t$).*

Exemple 2.3. *Calculons la primitive* $\displaystyle\int \tan t\,\mathrm{d}t$ *(on pose $u = \cos t$).*

Exemple 2.4. *Calculons* $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ *(on pose $u = \varphi(x) = 1 - x^2$).*

Exemple 2.5. *Calcul de* $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$. *(On pose* $x = \varphi(t) = \sin t$.*)*

Exemple 2.6. *Calcul de* $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ *(On pose* $x = \varphi(t) = \tan t$*).*

2.3 Applications

Théorème 2.3 (Parité, imparité, périodicité)**.**
Soit f *une fonction continue sur* I

(i) *Si* f *est paire et* $[-a, a] \subset I$, *alors :*

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) *Si* f *est paire et* $[-a, a] \subset I$, *alors :*

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(iii) *Si* f *une fonction continue de période* T *sur* I *alors :*

$$\forall a \in I,\ \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 2.7. *Calculons* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^3 t \cos t\,\mathrm{d}t$.

2.4 Quelques résultats utiles

Soit $a \in \mathbb{R}$, les primitives suivantes sont données à une constante près :

$$p \in \mathbf{Z}\setminus\{1\},\ \int \frac{1}{(x-a)^p}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{p-1} \times \frac{1}{(x-a)^{p-1}} \quad ; \quad x > 0,\ \int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$$

$$a \neq 0,\ \int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad ; \quad \int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| \quad .$$

2.5 Fonctions particulières

2.5.1 Fonctions du type : $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Notons Δ le discriminant associé à ax^2+bx+c.

— 1^er^ cas : $\Delta = 0$, on se ramène à une expression $\dfrac{1}{a(x-x_1)^2}$ et on intègre.

Exemple 2.8.
Calculer : $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{-3x^2+6x-3}\,\mathrm{d}x$

— 2^ème^ cas : $\Delta > 0$, on se ramène à une expression $\dfrac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}$ que l'on transforme (réduction en éléments simples) en $\dfrac{\alpha}{x-x_1} + \dfrac{\beta}{x-x_2}$ et on intègre.

Exemple 2.9.
Calculer : $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{2x^2+5x-3}\,\mathrm{d}x$

— $3^{\text{ème}}$ cas : $\Delta < 0$, on se ramène à une expression $\dfrac{1}{a(x-d)^2+e}$ (mise sous forme canonique) que l'on transforme avec un changement de variable en $\alpha\dfrac{1}{1+u^2}$ et on intègre.
Exemple 2.10.
Déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$

2.5.2 Polynômes trigonométriques

Pour calculer $\displaystyle\int \cos^n x \sin^m x\,\mathrm{d}x$, on distingue les deux cas suivants :

— si n est impair (resp. m est impair) on pose $\sin x = t$ (resp. $\cos x = t$) et l'on se ramène au calcul de primitive de $u' \times u^p$.
Exemple 2.11.
Déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin^5 x \cos^3 x$.

— si m et n sont pairs, alors il faut linéariser l'expression trigonométrique.
Exemple 2.12.
Calculer $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

3 Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes.

Définitions 3.1. *(Continuité, dérivabilité.)*
Soient $f : I \longmapsto \mathbb{C}$ une application et $a \in I$.

(*i*) *On dit que f est continue en a lorsque $Re(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.*
On dit que f est dérivable en a lorsque $Re(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. On appelle alors ***nombre dérivé*** *de f en a, et on note $f'(a)$, le nombre complexe $f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + \mathrm{Im}(f)'(a)$.*

(*ii*) *On dit que f est continue sur I lorsque f l'est en tout point de I.*
On dit que f est dérivable sur I lorsque f l'est en tout point de I.
Dans ce cas l'application $f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$ *est appelée la dérivée de f sur I.*

Définitions 3.2. *(Ensembles.)*
L'ensemble des applications de I dans $\mathbb{C}$ continues sur I est noté $\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$.
L'ensemble des applications de I dans $\mathbb{C}$ dérivables sur I est noté $\mathcal{D}(I,\mathbb{C})$.

Théorème 3.1. *(Dérivée des fonctions de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)}$)*
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I,\mathbb{C})$.
L'application $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{\varphi(x)} \end{array}$ *est dérivable sur I.*
Et sa dérivée a pour expression $f'(x) = \varphi'(x)\,\mathrm{e}^{\varphi(x)}$

Corollaire.
Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et l'application : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{\alpha x} \end{array}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'expression de sa dérivée est : $f'(x) = \alpha\, \mathrm{e}^{\alpha x}$.

Application aux fonctions de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}$, $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.

Exemple 3.1. *Calculons les primitives suivantes :*

$$\int \mathrm{e}^{x} \cos x \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int \mathrm{e}^{-x} \sin(2x)\,\mathrm{d}x.$$