# TD 7 : Primitives

## Exercice 1

Déterminer une primitive, en précisant sur quel(s) intervalle(s), de chacune des fonctions définies par :

**1/** $f(t) = te^{t^2}$

**2/** $f(t) = \dfrac{1}{t \ln t}$

**3/** $f(t) = \cos^3 t$

**4/** $f(t) = \sin^4(t)$

**5/** $f(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3}$

**6/** $f(t) = \mathrm{e}^t \cos t$

**7/** $f(t) = \dfrac{1}{t^2+5}$

**8/** $f(t) = \dfrac{\sin(2t)}{\cos^3(t)}$

**9/** $f(t) = \dfrac{-5t}{\sqrt{1+t^2}}$

**10/** $f(t) = \dfrac{\arctan^2(t)}{1+t^2}$

**11/** $f(t) = \dfrac{1-\tan(t)}{1+\tan(t)}$

**12/** $f(t) = \arcsin t$

**13/** $f(t) = t \arctan t$

**14/** $f(t) = \dfrac{1}{4t^2+4t+1}$

**15/** $f(t) = \dfrac{1}{4t^2+4t+5}$

**Solution:**

**1/** $\dfrac{\mathrm{e}^{t^2}}{2}$

**2/** $\ln(|\ln(t)|)$

**3/** $-\dfrac{\sin(t)^3}{3} + \sin(t)$

**4/** $-\dfrac{\sin(2t)}{4} + \dfrac{\sin(4t)}{32} + \dfrac{3t}{8}$

**5/** $\dfrac{\ln\left(|t^3+1|\right)}{3}$

**6/** $(\sin(t)+\cos(t))\,\dfrac{\mathrm{e}^t}{2}$

**7/** $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\dfrac{t}{\sqrt{5}}\right)$

**8/** $\dfrac{2}{\cos(t)}$

**9/** $-5\sqrt{t^2+1}$

**10/** $\dfrac{1}{3}\arctan^3(t)$

**11/** $-\dfrac{\ln\left(\tan(t)^2+1\right)}{2} + \ln(|\tan(t)+1|)$

**12/** $\sqrt{1-t^2} + t \arcsin(t)$

**13/** $\dfrac{1}{2}\left(t^2 \arctan(t) + \arctan(t) - t\right)$

**14/** $-\dfrac{1}{4t+2}$

**15/** $\dfrac{1}{4}\arctan\left(\dfrac{2t+1}{2}\right)$

## Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

**1/** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^3 t \,\mathrm{d}t$

**2/** $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \sin(2t)\,\mathrm{d}t$

**3/** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^3 t \,\mathrm{d}t$

**4/** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln t \,\mathrm{d}t$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

**5/** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$

**6/** $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ (Poser $x = \sqrt{t}$)

**7/** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t + t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$ (Poser $x = \ln(t)$)

**8/** $\displaystyle\int_0^{1} \arctan t \,\mathrm{d}t$

**9/** $\displaystyle\int_0^{1} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$

**Solution:**

**1/** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^3 t \,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \sin^3 t \,\mathrm{d}t = 0$

**2/** $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \sin(2t)\,\mathrm{d}t = \left[(\sin(2t) - 2\cos(2t))\,\frac{\mathrm{e}^t}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{-2\,\mathrm{e}^\pi + 2}{5}$

**3/** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^3 t \,\mathrm{d}t = \left[-t\cos(t) + \sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ ( IPP)

**4/** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}\ln(t)}{n+1} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{n\,\mathrm{e}^{n+1}+1}{(n+1)^2}$ (IPP)

**5/** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t\sin(\ln(t))}{2} - \frac{t\cos(\ln(t))}{2}\right]_1^{\mathrm{e}^\pi} = \frac{\mathrm{e}^\pi+1}{2}$ (IPP)

**6/** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} \underset{[x=\sqrt{t}]}{=} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2\mathrm{d}x}{1+x^2} = [2\arctan(x)]_1^{\sqrt{2}} = 2\arctan\left(\sqrt{2}\right) - \frac{\pi}{2}$

**7/** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \underset{[x=\ln(t)]}{=} \int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^2 = \frac{\ln(5)}{2}$

**8/** $\displaystyle\int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t = \left[t\arctan(t) - \frac{\ln\left(t^2+1\right)}{2}\right]_0^1 = \frac{-2\ln(2)+\pi}{4}$ (IPP)

**9/** $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln\left(t^2+1\right) - 2t + 2\arctan(t)\right]_0^1 = \frac{2\ln(2)+\pi-4}{2}$ (IPP)

**Exercice 3**

Calculer les intégrales suivantes :

**1/** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ *(poser $x=\cos t$ ).*

**2/** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$ *( écrire $\dfrac{x+1}{x^2-x+1} = \alpha\dfrac{u'}{u} + \beta\dfrac{1}{u}$ où $u$ et $u'$ sont des formes à déterminer).*

**3/** $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}t$ *(poser $x=\sqrt{t+1}$ ).*

**Solution:**

**1/** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{[x=\cos t]}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

**2/** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \left[\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

**3/**

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}t &\underset{[x=\sqrt{t+1}]}{=} \int_1^{\sqrt{2}} 2\left(x^2-1\right)^3\mathrm{d}x \\ &= 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(x^6-3x^4+3x^2-1\right)\mathrm{d}x = \left[2\left(\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + x^3 - x\right)\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{-18\sqrt{2}+32}{35}\end{aligned}$$

**Exercice 4**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

**1/** Montrer que $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

**2/** Montrer que $I_n \leqslant \ln\dfrac{n+1}{n}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

**3/** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

**Solution:**

**1/**

Pour $0 \leq x \leq 1$, on a $0 < x+n \leq x+n+1$ et $\sin(\pi x) \geq 0$, donc $0 \leq \dfrac{\sin(\pi x)}{x+n+1} \leq \dfrac{\sin(\pi x)}{x+n}$. D'où $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ par la positivité de l'intégrale.

**2/**

De $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$, on a $\dfrac{\sin(\pi x)}{x+n} \leq \dfrac{1}{x+n}$. D'où $0 \leq I_n \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x = \big[\ln(x+n)\big]_0^1 = \ln \frac{n+1}{n} \to 0$.

**3/**

Nous allons faire une intégration par parties avec $u = \dfrac{1}{x+n}$ et $v' = \sin(\pi x)$ (et donc $u' = -\dfrac{1}{(x+n)^2}$ et $v = -\dfrac{1}{\pi}\cos(\pi x)$) :

$$\begin{aligned} nI_n &= n\int_0^1 \frac{1}{x+n}\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{n}{\pi}\left[\frac{1}{x+n}\cos(\pi x)\right]_0^1 - \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n \end{aligned}$$

Il nous reste à évaluer $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{(x+n)^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\left|\frac{n}{\pi}J_n\right| \leq \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{|\cos(\pi x)|}{(x+n)^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{n}{\pi}\left[-\frac{1}{x+n}\right]_0^1 = \frac{n}{\pi}\left(-\frac{1}{1+n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1} \to 0.$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n = \frac{2}{\pi}$.

## Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$.

**1/** Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

**2/** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

**3/** En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}$ $\left(\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \text{ est notée } \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\right)$.