TD 18 : Polynôme

Exercice 1

Effectuer la division euclidienne dans $\mathbf{C}[X]$ de A par B pour :

1/ $A = X^3 + \mathrm{i}\,X^2 - 2\,\mathrm{i}\,X$ et $B = X + \mathrm{i}$

2/ $A = (X+1)^3 - 4$ et $B = (X+2)^2$

Exercice 2

Prouver que :

1/ $4(X+2)^5 - X^4 - 3$ est divisible par $X+1$.

2/ $(X+1)^8 - X^8 - 2X - 1$ est divisible par $X(X+1)$.

3/ $X^5 - X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 2X$ est divisible par $(X-1)^3$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de A_n par B :

1/ $A_n = X^{2n} + (X-1)^n$ par $B = X(X-1)$

2/ $A_n = X^n + X + 1$ par $B = (X-1)^2$

3/ $A_n = X^n$ par $B = X^2 + 1$

4/ $A_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(X \sin(\theta_k) + \cos(\theta_k)\right)$ par $B = X^2 + 1$, avec $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{n}$.

Exercice 4

Soit P un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X-1$ est a et celui de la division de P par $X-2$ est b, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)$?

Exercice 5

Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$, puis dans $\mathbf{R}[X]$ les polynômes P suivants.

1/ $P = X^5 - 1$.

2/ $P = X^4 + 1$.

Exercice 6

Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$, le polynôme $P = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n - \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Exercice 7

1/ Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $D = X^2 - 4X - 5$ ($n \in \mathbf{N}$).

2/ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I_3.

3/ En déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $P = (X+1)^{2n} + (1-X)^{2n}$.

1/ Déterminer les racines dans $\mathbf{C}$ de P ; on montrera qu'on obtient les nombres complexes $z_k = \mathrm{i}\tan\left(\dfrac{2k+1}{4n}\pi\right)$, avec $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$.

2/ Factoriser P dans $\mathbf{C}[X]$.

3/ Comparer z_k et z_{2n-1-k} pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

4/ Montrer que $P = 2\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 + \tan^2\left(\frac{2k+1}{4n}\pi\right)\right)$

5/ Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\tan^2\left(\frac{2k+1}{4n}\pi\right)$ et $T = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\tan^2\left(\frac{2k+1}{4n}\pi\right)$.