TD 10 : Les nombres réels

Exercice 1

1/ Soient x et y deux réels. On pose $z = x + y$ et $w = x \times y$.

Étudier la rationalité de z et w dans les cas suivants :

1. x et y sont rationnels ;
2. x est rationnel et y est irrationnel ;
3. x et y sont irrationnels.

2/ Montrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Exercice 2

Déterminer l'existence, et le cas échéant déterminer les valeurs, des bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

1. $A = \left\{(-2)^n + \dfrac{1}{n} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\right\}$
2. $B = \left\{5 - \dfrac{1}{n+1} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 3

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$, on note $A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$.

Montrer que : $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 4

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\lfloor 3x - 2 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor$

Exercice 5

Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x, on a $\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor x + \dfrac{1}{2} \rfloor$.

1. Démontrer que f est périodique.
2. Démontrer que f est nulle sur $[0; 1[$. *(On pourra considérer deux cas.)*
3. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \lfloor x + \dfrac{1}{2} \rfloor$
4. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \rfloor$.