Table des matières

Chapitre 5

Complexes

1 L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

1.1 Forme algébrique

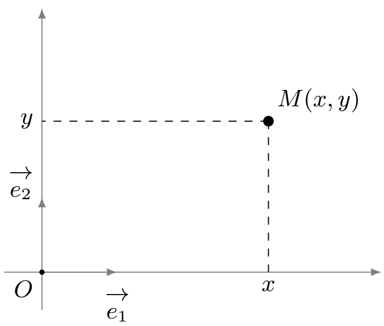
Définition 1.1.
*Tout nombre complexe z s'écrit sous la forme dite **algébrique** :$z = x + \mathrm{i}y$ où x, y sont des réels et i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.*
*x est appelé **partie réelle** de z , on note $x = \mathrm{Re}(z)$*
*y est appelé **partie imaginaire** de z , on note $y = \mathrm{Im}(z)$.*

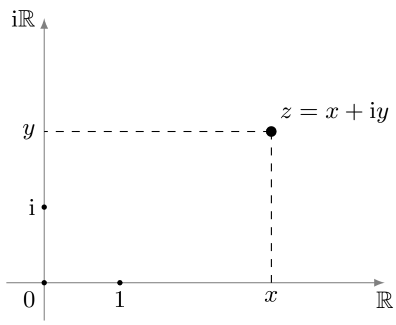
Remarques.

1. *L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.*
2. *$z = z' \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$, en particulier :*
$$z = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0.$$
3. *Si $y = 0$ on dit que z est **réel**, si $x = 0$ on dit que z est un **imaginaire pur**, autrement dit $\mathrm{i}z \in \mathbb{R}$.*

1.2 Représentation géométrique

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (appelé plan complexe)





1. L'application de $\mathbb{C}$ dans P qui au nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$ associe le point $M(x, y)$ est une **bijection**.
On dit que z est **l'affixe** de M et que M est **l'image** de z, on note $M(z)$.
Ici, $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$

2. L'application de $\mathbb{C}$ dans l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan qui à $z = x + \mathrm{i}\,y$ associe $\vec{v}(x, y)$ est une **bijection**.

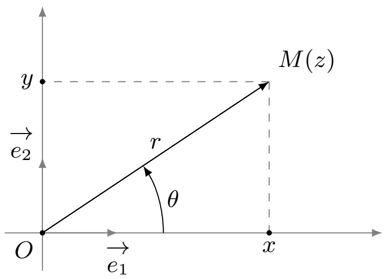
Remarque.
Pour $M(z)$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z. Si l'on a $A(z_A), B(z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

1.3 Forme trigonométrique

Définition 1.2.
Soit $z = x + \mathrm{i}\,y$ un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

*(i) On appelle **module** de z, noté $|z|$, le nombre réel positif $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;*

*(ii) la mesure θ de l'angle $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$, définie à 2π près, est appelé **argument** de z et il est noté $\theta = \arg(z)$; on en donne généralement la détermination principale appartenant à $]-\pi, \pi]$.*



Remarques.

1. *On a pour $z \in \mathbb{C}^*$, $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)$ (**forme trigonométrique**) où :*

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{r}.}$$

2. *z est parfois noté $[r, \theta]$ (**forme polaire**).*
3. *$z = z' \iff (r = r' \text{ et } \theta = \theta' \ [2\pi])$.*
4. *Interprétation géométrique : soit $M(z)$ alors $|z| = |OM|$.*

Exercices d'application.
Mettre les nombres complexes suivants sont forme trigonométrique : 1, i, -1, $-\mathrm{i}$, $2\mathrm{i}$, $1 + \mathrm{i}$, $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$, $\dfrac{2}{\sqrt{3} + \mathrm{i}}$.

2 Opérations sur les nombres complexes

2.1 Corps des nombres complexes

On munit $\mathbb{C}$ de deux opérations internes $+$ et $\times$ définies par :

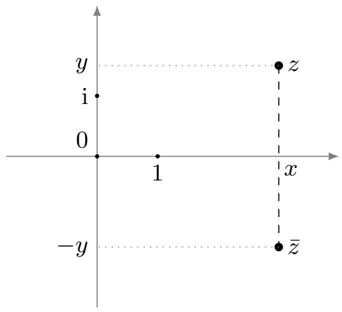
1. $(x + \mathrm{i}\,y) + (x' + \mathrm{i}\,y') = (x + x') + \mathrm{i}\,(y + y')$
2. $(x + \mathrm{i}\,y) \times (x' + \mathrm{i}\,y') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

Remarques.

1. $z.z' = z'.z$;
2. $zz' = 0 \iff z = 0$ ou $z' = 0$.
3. *Soit* $p \in \mathbf{Z}$, *on a* $\mathrm{i}^{4p} = 1,\ \mathrm{i}^{4p+1} = \mathrm{i},\ \mathrm{i}^{4p+2} = -1,\ \mathrm{i}^{4p+3} = -\mathrm{i}$.

2.2 Conjugaison

Définition 2.1.
Soit $z = x + \mathrm{i}\,y$ *(*x, y *réels), on définit le* ***conjugué*** *de* z *par* $\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y$.



Proposition 2.1.
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

(i) $\overline{\overline{z}} = z$;
(ii) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
(iii) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$;
(iv) *si* $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$;
(v) *si* $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$;
(vi) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$;
(vii) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$;
$(viii)$ *si* $z = x + \mathrm{i}\,y$ *(*x, y *réels) alors* $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$.

Remarque.
Par récurrence, on en déduit que pour $n \in \mathbf{N}^*$, $(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$;

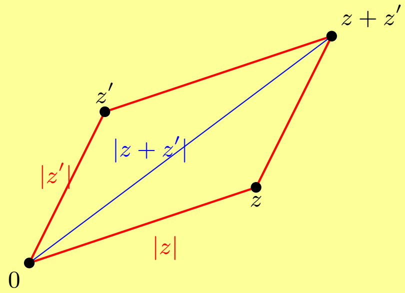
$$\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}, \quad \overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$$

Proposition 2.2.
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

(i) $z.\overline{z} = |z|^2$;
(ii) $|z| = 0 \iff z = 0$
(iii) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
(iv) $|zz'| = |z||z'|$ *et par récurrence, on a pour* $n \in \mathbf{N}^*$ *et* $(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k| .$$

(v) *Pour* $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ *et* $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.
(vi) $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ *et* $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.
(vii) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$



et par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ *et* $(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

$(viii)$ $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$.
(ix) *Pour tous points* A *et* B *du plan complexe* $AB = |z_B - z_A|$.

2.3 Propriétés de l'argument

On rappelle que tout nombre complexe z non nul s'écrit sous la forme $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Proposition 2.3.
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$.

(i) $\arg(z) = 0\ [2\pi] \iff z \in \mathbb{R}_+^*$; .
$\arg(z) = 0\ [\pi] \iff z \in \mathbb{R}^*$;
$\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \iff z$ *est un imaginaire pur.*
(ii) $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$ *et* $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$;
(iii) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;
$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{*n},\ \arg\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \arg(z_k)\ [2\pi]$;
(iv) $\arg(1/z) = -\arg(z)\ [2\pi]$
$\forall n \in \mathbf{Z}, \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$;
$\arg(z'/z) = \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$

3 Interprétation géométrique des nombres complexes

3.1 Interprétation d'une différence

Proposition 3.1.
Soient $A(a), B(b)$, *alors* $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)\ [2\pi]$.

3.2 Interprétation d'un rapport

Proposition 3.2.
Soient $A(a), B(b), C(c)$ *et* $D(d)$, *alors :*

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg(\frac{d-c}{b-a})\ [2\pi] \text{ et } \frac{CD}{AB} = \left|\frac{d-c}{b-a}\right|.$$

Conséquences :

Soient quatre points AB, C, D, alors :

$$\boxed{(AB)//(CD) \iff \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0\ [\pi]}$$

$$\boxed{(AB) \perp (CD) \iff \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]}$$

Proposition 3.3 (condition d'alignement ou de cocyclicité)**.**
Soient $A(a), B(b), C(c), D(d)$ *quatre points deux à deux distincts :*
A, B, C, D *sont cocycliques ou alignés si et seulement si :*
$\arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)\ [\pi]$ *autrement dit* $\frac{d-a}{d-b} \times \frac{c-b}{c-a} \in \mathbb{R}^*$.

Exercices d'application.

1. *Prouver que les points* $A(1+\mathrm{i})$, $B(-1-\mathrm{i})$, $C(-4+2\mathrm{i})$ *forment un triangle rectangle.*
2. *Déterminer les points* $M(z)$ *tels que* $A(1+\mathrm{i})$, $B(-2+3\mathrm{i})$ *et* $M(z)$ *forment un triangle rectangle isocèle.*
3. *Déterminer les points* $M(z)$ *tels que* $A(1+2\mathrm{i})$, $B(3+\mathrm{i})$ *et* $M(z)$ *soient alignés.*
4. *Déterminer les points* $M(z)$ *tels que* $A(1+2\mathrm{i})$, $B(3+\mathrm{i})$, $C(1-\mathrm{i})$ *et* $M(z)$ *soient cocycliques.*

3.3 Exemples d'applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

Définition 3.1 (Transformations du plan)**.**
On appelle transformation du plan $\mathbb{R}^2$ *toute application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *bijective.*

Définitions 3.1 (Isométries).
On appelle ***isométrie*** *du plan* $\mathbb{R}^2$ *toute transformation du plan qui conserve les distances.*

(i) *Translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$:
l'image du point $M \in \mathbb{R}^2$ *est le point* $M' \in \mathbb{R}^2$ *tel que :* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

(ii) *Symétrie de centre* Ω :
l'image du point $M \in \mathbb{R}^2$ *est le point* $M' \in \mathbb{R}^2$ *tel que :* $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$.

(iii) *Symétrie d'axe* Δ :
l'image du point $M \in \mathbb{R}^2$ *est le point* $M' \in \mathbb{R}^2$ *tel que :* $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$ *où* H *est le projeté orthogonal de* M *sur* Δ.

(iv) *Rotation de centre* Ω*, de sens direct, d'angle* α :
l'image du point $M \in \mathbb{R}^2$ *est le point* $M' \in \mathbb{R}^2$ *tel que :* $\Omega M' = \Omega M$ *et* $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha$.

Définition 3.2 (Homothétie).
On appelle ***homothétie*** *de centre* Ω *et de rapport* $k \in \mathbb{R}^*$ *du plan* $\mathbb{R}^2$:
l'image du point $M \in \mathbb{R}^2$ *est le point* $M' \in \mathbb{R}^2$ *tel que :* $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

Remarques.

1. *Une homothétie de rapport* 1 *est l'identité, tout comme une rotation de d'angle* 0 *ou encore une translation de vecteur nul.*

2. *Une homothétie de rapport* -1 *est une symétrie centrale, tout comme une rotation d'angle* π.

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $f_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, telle que $f_{a,b} : z \mapsto az + b$ et $F_{a,b} : P \to P$ telle que $F_{a,b} : M(z) \mapsto M'(az + b)$.

Nous avons déjà vu les interprétations géométriques du module et d'un argument d'un nombre complexe, nous les utilisons ici pour établir des correspondances entre applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et transformations du plan.

Théorème 3.1.

(i) *Soit* $b \in \mathbb{C}$.
L'application $f_{1,b} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + b \end{array}$ *est la translation de vecteur* $\vec{u}$ *d'affixe* b.

(ii) *Soit* $a = k \in \mathbb{R}^*$.
L'application $f_{k,0} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & kz \end{array}$ *est l'homothétie de centre* O *et de rapport* k.

(iii) *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
L'application $f_{a,0} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z \end{array}$ *est la rotation de centre* O*, de sens direct, et d'angle* θ.

(iv)
L'application $s : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$ *est la symétrie axiale d'axe* $(O, \vec{i})$.

4 Puissances et racines nième

4.1 Exponentielle d'un imaginaire pur

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta$; on obtient les propriétés suivantes :

Proposition 4.1.
Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$,

1. $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(\theta+\theta')}$; $\dfrac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(\theta-\theta')}$;
2. $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}n\theta}$, *autrement dit* $(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)^{\,n} = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\,\sin(n\theta)$ *(formule de Moivre) ;*
3. $\overline{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $\quad -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$;
4. $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta} = 1 \iff \theta \in 2\pi\mathbf{Z}$;
5. $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\,i\theta} + \mathrm{e}^{\,-i\theta}}{2}$, $\qquad \sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\,i\theta} - \mathrm{e}^{\,-i\theta}}{2\mathrm{i}}$ *(formules d'Euler)*

4.2 Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul

Définition 4.1.
Soient $n \in \mathbf{N}^*$ *et* $a \in \mathbb{C}$ *on dit que* $z \in \mathbb{C}$ *est* ***une racine*** $n^{\text{ième}}$ *de* a *si* $z^n = a$.

Théorème 4.1.
Soit $n \in \mathbf{N}$, *pour tout nombre complexe non nul* $z = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}$, *où* $r = |z|$ *et* $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$, *admet* n *racines* $n^{ième}$:

$$\boxed{\omega_k = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \{0, 1, ..., n-1\}.}$$

Remarques.

1. *Les images ponctuelles des racines* $n^{ième}$ *de* z *sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de centre* O *et de rayon* $\sqrt[n]{\rho}$.
2. *D'après ce qui précède* 1 *possède* n *racines* $n^{ième}$, $w_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ *avec* $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$.

Proposition 4.2.
Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

1. *L'ensemble des racines* $n^{ième}$ *de* 1, $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}$ *est stable pour la multiplication.*
2. *La somme des* n *racines* $n^{ième}$ *de l'unité est nulle.*

Exercices d'application.
Calculer les racines $4^{ième}$ *de* 1 *puis de* i.

4.2.1 Racines carrées : calcul algébrique

Soient $Z = x + \mathrm{i}\,y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + \mathrm{i}\,b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Exercices d'application.

1. *Calculer les racines carrées de* $z_1 = \mathrm{i}$ *puis de* $z_2 = 1 + \mathrm{i}$.
2. *Calculer les racines carrées de* $z_1 = 1 + 3\mathrm{i}$ *puis de* $z_2 = -5 + 12\mathrm{i}$.

4.2.2 Résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Proposition 4.3 (Résolution d'équations du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$)**.**
L'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$*, où* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *et* $a \neq 0$*, possède deux solutions* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *éventuellement confondues.*
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ *le discriminant, alors les solutions sont de trois types :*

— *si* $\Delta = 0$*, la racine double est réelle et vaut* $-\dfrac{b}{2a}$,

— *si* $\Delta > 0$*, on a deux solutions réelles* $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,

— *si* $\Delta < 0$*, on a deux solutions complexes, mais non réelles,* $\dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Théorème 4.2 (Équation $az^2 + bz + c = 0$)**.**
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$*, l'équation* $az^2 + bz + c = 0$ *admet deux solutions* z_1 *et* z_2*, éventuellement égales, dans* $\mathbb{C}$.
Si l'on note $S = z_1 + z_2$ *et* $P = z_1 z_2$*, alors :*

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = \frac{c}{a}.$$

5 Applications trigonométriques des nombres complexes

5.1 Développement de $\cos nx, \sin nx$ et $\tan nx$

En appliquant la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\boxed{\cos nx + \mathrm{i}\sin nx = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \mathrm{i}^k\ \sin^k x\ \cos^{n-k} x}$$

Par identification des parties réelles et des parties imaginaires on obtient :

$$\begin{aligned} \cos nx &= \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(x) \sin^{2k}(x) \\ \sin nx &= \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}(x) \sin^{2k+1}(x). \end{aligned}$$

En cas d'existence :

$$\tan nx = \frac{\sin(nx)}{\cos(nx)} = \frac{\sin(nx)/\cos^n x}{\cos(nx)/\cos^n x} = \frac{\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \tan^{2k+1} x}{\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k} \tan^{2k} x}.$$

5.2 Linéarisation de $\cos^n x$, $\sin^n x$ et $\cos^n x \sin^p x$

En appliquant la formule d'Euler et et la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\cos^n x = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad \sin^n x = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^n.$$

5.3 Transformation de $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$ en $A\cos(\theta - \varphi)$.

Théorème 5.1.
Soient a et b deux réels. Il existe A et φ réels tels que pour tout réel θ :

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = A\cos(\theta - \varphi).$$

Exercices d'application.

1. *Transformer* $\cos\theta + \sin\theta$.
2. *Déterminer la somme des tensions de* $u_1 = \sqrt{2}\cos(\theta)$ *et* $u_2 = \sqrt{6}\sin(\theta)$