

TD AL 5 : Nombres complexes

Exercice 1 Forme algébrique

1/ Mettre sous forme $a + ib$ les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \frac{4}{1-i}$,

b) $z_2 = \frac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i)^9}$

2/ Démontrer que $1 + j + j^2 = 0$ (avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$), en déduire la forme algébrique de : $z_3 = \frac{(1+j)^7}{j^5}$

Solution:

1/

a) $z_1 = 2 + 2i$,

b) $z_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

2/ $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$ car $j^3 = e^{i3\frac{2\pi}{3}} = 1$, on en déduit que $z_3 = \frac{(1+j)^7}{j^5} = \frac{(-j^2)^7}{j^2} = -\frac{j^2}{j^2} = -1$.

Exercice 2 Module et argument

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1/ $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.

Solution:

$4, \frac{\pi}{4}$.

2/ $\frac{(4-4i)^2}{(1+i\sqrt{3})^3}$.

Solution:

$4, \frac{\pi}{2}$.

3/ $-4e^{i\frac{\pi}{3}}$

Solution:

$4, \frac{4\pi}{3}$.

4/ $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{4}}$

Solution:

$e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{7\pi}{24}} (e^{i\frac{\pi}{24}} - e^{-i\frac{\pi}{24}}) = 2i \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) e^{i\frac{7\pi}{24}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{7\pi}{24}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) e^{i\frac{19\pi}{24}}$. Donc son module est $2 \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$ et son argument $\frac{19\pi}{24} [2\pi]$.

5/ $1 + e^{i\varphi}$.

Solution:

$$z = 1 + e^{i\varphi} = e^{i\varphi/2} (e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2}) = 2 \cos(\varphi/2) e^{i\varphi/2}.$$

Si $2 \cos(\varphi/2) \geq 0$, alors $|z| = 2 \cos(\varphi/2)$ et $\arg z = \varphi/2 [2\pi]$.

Si $2 \cos(\varphi/2) \leq 0$, alors $|z| = -2 \cos(\varphi/2)$ et $\arg z = \varphi/2 + \pi [2\pi]$.

6/ $\frac{1 + \cos \varphi + i \sin \varphi}{1 - \cos \varphi - i \sin \varphi}$, ($\varphi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Solution:

$$z = \frac{1 + e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{\cos \varphi/2}{-i \sin \varphi/2} = i \frac{\cos \varphi/2}{\sin \varphi/2}.$$

Si $\frac{\cos \varphi/2}{\sin \varphi/2} \geq 0$, alors $|z| = \frac{\cos \varphi/2}{\sin \varphi/2}$ et $\arg z = \pi/2 [2\pi]$.

Si $\frac{\cos \varphi/2}{\sin \varphi/2} \leq 0$, alors $|z| = -\frac{\cos \varphi/2}{\sin \varphi/2}$ et $\arg z = 3\pi/2 [2\pi]$.

7/ $\frac{1 + i \tan \varphi}{1 - i \tan \varphi}$, ($\varphi \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Solution:

$$z = \frac{1 + i \tan \varphi}{1 - i \tan \varphi} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}.$$

Donc $|z| = 1$ et $\arg z = 2\theta [2\pi]$

8/ $1 + \sin \varphi - i \cos \varphi$, ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

Solution:

$$z = 1 - i e^{i\varphi} = 1 + e^{i(-\pi/2 + \varphi)} = e^{i(-\pi/4 + \varphi/2)} (e^{i(-\pi/4 + \varphi/2)} + e^{-i(-\pi/4 + \varphi/2)}) = 2 \cos(-\pi/4 + \varphi/2) e^{i(-\pi/4 + \varphi/2)}.$$

Comme $\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \in [0, \pi/2]$, alors $2 \cos(-\pi/4 + \varphi/2) \geq 0$ et par suite $|z| = 2 \cos(-\pi/4 + \varphi/2)$ et $\arg z = \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) [2\pi]$.

Exercice 3 Module et argument

Soient z, z' deux nombres complexes de module 1 tels que $1 + zz' \neq 0$. Montrer que $Z = \frac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel.

Solution:

$\bar{Z} = -Z$ ou encore, on peut dire :

$$Z = \frac{e^{it} + e^{it'}}{1 + e^{i(t+t')}} = \frac{e^{i(t+t')/2} \times 2 \cos((t-t')/2)}{e^{i(t+t')/2} \times 2 \cos((t+t')/2)} = \frac{\cos((t-t')/2)}{\cos((t+t')/2)} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes :

1/ $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f : z \mapsto \bar{z}$.

3/ $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f : z \mapsto az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

2/ $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+, f : z \mapsto |z|$.

Solution:

1/ f bijective, car pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $z' = \bar{z} \in \mathbb{C}$ tel que $f(z') = \bar{\bar{z}} = z$.

2/ f n'est pas injective car pour $z \in \mathbb{C}^*$ on a $z \neq (-z)$ et $f(z) = f(z') = |z|$.

f est surjective car pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe $z = y \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = |y| = y$. On conclut que f est non bijective car non injective.

3/ f bijective car : $\forall z' \in \mathbb{C}, \exists z = \frac{b - z'}{a} \in \mathbb{C}, f(z) = z'$.

Exercice 5

Soit $P = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

Montrer que f définie $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$ est une bijection de P vers D .

Exercice 6 Transformation homographique

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \longmapsto & \frac{z + i}{z - i} \end{cases}$

1/ Montrer que f est bijective.

2/ Déterminer $f(\mathbb{R}), f(\mathbb{U} \setminus \{i\}), f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

Solution:

1/

- Injectivité :

Soit $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$:

$$\begin{aligned} f(z) = f(z') &\iff \frac{z + i}{z - i} = \frac{z' + i}{z' - i} \iff (z + i)(z' - i) = (z' + i)(z - i) \\ &\iff zz' - iz + iz' + 1 = z'z - iz' + iz + 1 \iff 2iz' = 2iz \\ &\iff z = z'. \end{aligned}$$

L'application f est donc injective.

- Surjectivité :

Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, existe-t-il $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tel que $f(z) = Z$?

$$\begin{aligned} f(z) = Z &\iff \frac{z + i}{z - i} = Z \iff z + i = Z(z - i) \\ &\iff z(1 - Z) = -iZ - i \\ &\iff z = \frac{iZ + i}{Z - 1} \quad (Z \neq 1). \end{aligned}$$

Il nous reste à vérifier que $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a :

$$z = i \iff \frac{iZ + i}{Z - 1} = i \iff iZ + i = iZ - i \iff i = -i \text{ ce qui est absurde.}$$

On vient de prouver que pour tout $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, l'existence de $z = \frac{iZ + i}{Z - 1} \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tel que $f(z) = Z$, donc f est surjectif et par suite bijectif car f est injectif.

2/

- Par définition $f(\mathbb{R}) = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$.

On a $f(x) = \frac{x+i}{x-i}$ et on vérifie rapidement que $f(x) \neq 1$ (car le cas contraire mène à une absurdité), et

$$|f(x)| = \frac{|x+i|}{|x-i|} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 1, \text{ donc } f(x) \in \mathbb{U}, \text{ autrement dit } f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U} \setminus \{1\}.$$

Réciproquement, si $Z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, alors Z s'écrit sous la forme $Z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D'après la question précédente, il existe $z = \frac{iZ + i}{Z - 1} \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ vérifiant $f(z) = Z$. On a :

$$\begin{aligned} z = \frac{iZ + i}{Z - 1} &\iff z = \frac{ie^{i\theta} + i}{e^{i\theta} - 1} = i \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} \\ &\iff z = i \frac{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} = i \frac{2\cos(\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)} \text{ (avec } \frac{\theta}{2} \neq k\pi) \\ &\iff z = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On vient de prouver que $\mathbb{U} \setminus \{1\} \subset f(\mathbb{R})$ et donc $\boxed{f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{1\}}$.

- Déterminons $f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$.

Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}$, on peut donc écrire $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On a :

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{z+i}{z-i} &\iff f(z) = \frac{e^{i\theta} + e^{i\pi/2}}{e^{i\theta} - e^{i\pi/2}} \\ &\iff f(z) = \frac{e^{i\frac{2\theta+\pi}{4}}(e^{i\frac{2\theta+\pi}{4}} + e^{-i\frac{2\theta+\pi}{4}})}{e^{i\frac{2\theta+\pi}{4}}(e^{i\frac{2\theta+\pi}{4}} - e^{-i\frac{2\theta+\pi}{4}})} \\ &\iff f(z) = \frac{2\cos(\frac{2\theta+\pi}{4})}{2i\sin(\frac{2\theta+\pi}{4})} \text{ (avec } \frac{2\theta+\pi}{4} \neq k\pi) \\ &\iff f(z) = -i \frac{\cos(\frac{2\theta+\pi}{4})}{\sin(\frac{2\theta+\pi}{4})} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

On vient de prouver que $f(\mathbb{U} \setminus \{i\}) \subset i\mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $Z \in i\mathbb{R}$, alors $Z = ix$ avec $x \in \mathbb{R}$.

On a prouvé dans la surjectivité l'existence de $z = \frac{iZ + i}{Z - 1} \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, tel que $Z = f(z)$. On a :

$$\begin{aligned} |z| = \left| \frac{iZ + i}{Z - 1} \right| &\iff |z| = \left| \frac{i(ix) + i}{ix - 1} \right| = \left| \frac{-x + i}{ix - 1} \right| \\ &\iff |z| = 1 \iff z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $i\mathbb{R} \subset f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$ et par suite $f(\mathbb{U} \setminus \{i\}) = i\mathbb{R}$.

- Déterminons $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

Soit $z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\}$, on peut donc écrire $z = ix$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a :

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i} \iff f(z) = \frac{ix+i}{ix-i} = \frac{x+1}{x-1} \in \mathbb{R}.$$

Par hypothèse, $f(z) \neq 1$, d'où $f(z) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ soit $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Réciproquement, soit $Z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors $Z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 1$.

Par surjectivité, il existe $z = \frac{iZ+i}{Z-1} \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, tel que $Z = f(z)$. On a :

$$z = \frac{ix+i}{x-1} \iff z = i \frac{x+1}{x-1} \in i\mathbb{R} \text{ avec } \frac{x+1}{x-1} \neq 1$$

Ceci prouve que $\mathbb{R} \setminus \{1\} \subset f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$ et par suite $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Exercice 7 Triangle équilatéral

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1/ $\{a, b, c\}$ est un triangle équilatéral.

3/ $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

2/ j ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c = 0$.

4/ $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

Exercice 8

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z \mathcal{R} z' \iff |z| = |z'|.$$

1/ Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2/ Déterminer la classe d'équivalence de 1 et la représenter.

Solution:

1/ $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

2/ La classe de 1 est le cercle unité.

Exercice 9 Configuration de points

Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1/ $|z-1| \leq 4$

2/ $\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Solution:

Disque fermé de centre $(1, 0)$ et de rayon égal à 4

Solution:

La demi-droite d'équation $y = x$ avec $x > 0$.

3/ $|z - 1 + 2i| = 4$

Solution:

Cercle de centre $(1, -2)$ et de rayon égal à 4

4/ $\arg(z + 1 - i) = \frac{\pi}{3}[\pi]$

Solution:

La droite passant par le point $A(-1, 1)$ et dont un vecteur directeur fait un angle avec $\vec{i}$ de mesure $\pi/3$ (cette droite est privée du point A). Son équation cartésienne est $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} + 1$.

5/ $|z - 1| = |z - i|$

Solution:

La médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$.

6/ $\arg\left(\frac{i-z}{2-z}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Solution:

Cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(2, 0)$ et $B(0, 1)$ et privé de ces deux points.

7/ ABC soit un triangle équilatéral direct avec $A(1 + i)$, $B(4 + 3i)$ et $M(z)$.

Solution:

On a $z - a = (b - a)e^{i\pi/3}$ ou $z - a = (b - a)e^{-i\pi/3}$ avec a et b les affixes des points A et B . Donc :
 $z = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{2} + \frac{i(4 + 3\sqrt{3})}{2}$ ou $z = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{2} + \frac{i(4 - 3\sqrt{3})}{2}$.

8/ z, z^2, z^4 sont alignés.

Solution:

$z \in \mathbb{R}$ ou $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$.

9/ $1, z, z^2$ forment un triangle rectangle.

Solution:

$z \in -1 + i\mathbb{R}$ ou $z \in i\mathbb{R}$ ou $|z + 1/2| = 1/2$.

10/ $z, \frac{1}{z}, -i$ sont alignés.

Solution:

$z \in i\mathbb{R}$ ou $|z - i| = \sqrt{2}$.

Exercice 10 Cercle

Trouver les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $z, 1 - z$ et $1/z$ aient des images sur le même cercle de centre O .

Solution:

.

Exercice 11 $z + 1/z = 2$

Trouver les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$.

Solution:

Poser $z = x + iy$. On trouve les cercles de centre $\pm i$ et de rayon $\sqrt{2}$ (laborieux).

Exercice 12 Racines de l'unité

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 1 = 0$.

Solution:

$$z_k = e^{i \frac{k\pi}{2}} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

2/ En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Solution:

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \iff \frac{1 - z^4}{1 - z} = 0, z \neq 1 \iff z_k = e^{i \frac{k\pi}{2}} \text{ avec } k \in \{1, 2, 3\}. \text{ Donc } \mathcal{S} = \{i, -i, -1\}.$$

3/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{3z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{3z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{3z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$

Solution:

$$\text{On a } \frac{3z_k + i}{z_k - i} = e^{i \frac{k\pi}{2}} \text{ avec } k \in \{1, 2, 3\}. \text{ Donc } \mathcal{S} = \left\{ \frac{2-i}{5}, -\frac{2+i}{5}, 0 \right\}.$$

Exercice 13 Racines de l'unité

Résoudre :

1/ $(z+1)^n = (z-1)^n$.

$$5/ \left(\frac{1+ix}{1-ix} \right)^n = \frac{1+i \tan a}{1-i \tan a}.$$

Solution:

$$z = -i \cotan \frac{k\pi}{n}.$$

Solution:

$$x = \tan \left(\frac{a + 2k\pi}{n} \right).$$

2/ $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

6/ $\left(\frac{z+1}{z-1} \right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 = 0$.

Solution:

$$z = \exp \frac{(2k+1)i\pi}{5}, k = 0, 1, 3, 4.$$

Solution:

$$z = \pm i, \pm i(2 \pm \sqrt{3}).$$

3/ $1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

7/ $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

Solution:

$$z = -1 \text{ ou } z = \exp \frac{2ik\pi}{n}, 1 \leq k < n.$$

Solution:

$$z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{2e^{i\pi/3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i7\pi/12}.$$

Les solutions sont :

$$z_k = \sqrt[4]{r} e^{i(\frac{\theta}{4} + \frac{k\pi}{2})} \text{ avec } r = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta = -\frac{7\pi}{12} \text{ et } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Exercice 14 Sommes sur les racines de l'unité

Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$.

Exercice 15 $e^{2i\pi/7}$

Soit $z = e^{2i\pi/7}$ et $u = z + z^2 + z^4$, $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1/ Calculer $u + v$ et u^2 .

Solution:

$$u + v = -1, u^2 = u + 2v = -2 - u.$$

2/ En déduire $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}$.

Solution:

$$S = \operatorname{Im} u = \frac{1}{2}\sqrt{7}.$$

Exercice 16 Position des racines carrées

Soit $z \in \mathbb{C}$ et p, q ses racines carrées. A quelle condition z, p, q forment-ils un triangle rectangle en z ?

Solution:

$$|z| = 1.$$

Exercice 17 Équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1/ $z^2 \sin^2 t - 4z \sin t + 4 + \cos^2 t = 0$.

Solution:

$\Delta = 4 \cos(t)^4 - 4 \cos(t)^2$ dont $\delta = 2i \cos(t) \sin(t)$ est une racine carrée. Les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{2}{\sin(t)} + \frac{i \cos(t)}{\sin(t)}, \quad z_2 = \frac{2}{\sin(t)} - \frac{i \cos(t)}{\sin(t)}$$

2/ $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$

Solution:

$$i, -i, \frac{-1+i}{2}, \frac{-1-i}{2}.$$

3/ $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

Solution:

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^6 = \frac{-1}{27} = \frac{1}{27} e^{i\pi}, \text{ d'où :}$$

$$\frac{z_k - 1}{z_k + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{i\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)} \text{ avec } k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket.$$

Au final, $z_k = \frac{u+1}{-u+1}$ avec $u = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{i\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)}$ et $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.

4/ $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.

Solution:

$$z_1 = -z_2 = 3 - 2i, \quad z_3 = -z_4 = 1 - i.$$

5/ $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$.

Solution:

$$z = 1 \pm 2i, \quad z = -4 \pm 2i.$$

Exercice 18 Équation du second degré

Comment faut-il choisir $m \in \mathbb{C}$ pour que l'équation : $z^2 - (2 + im)z - (1 + im) = 0$ admette deux racines imaginaires conjuguées ?

Solution:

$$m = 2i.$$

Exercice 19 Moyennes géométrique et arithmétique

1/ Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$.

2/ Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $m = \frac{\alpha + \beta}{2}$ et μ une racine carrée de $\alpha\beta$. Montrer que $|\alpha| + |\beta| = |m + \mu| + |m - \mu|$.

Solution:

$$\text{élever au carré : } |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2 \underbrace{|\alpha\beta|}_{|\mu|^2} = \underbrace{|m - \mu|^2 + |m + \mu|^2}_{2|m|^2 + 2|\mu|^2} + 2 \underbrace{|m^2 - \mu^2|}_{|\alpha - \beta|^2/4}.$$

Exercice 20 Transformations trigonométriques

1/ Pour $x \in \mathbb{R}$, Linéariser $\cos^4 x \cdot \sin^2 x$.

2/ Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin(5x)$ comme produit de $\sin(x)$ par un polynôme en $\cos x$.

Solution:

$$1/ \cos^4 x \cdot \sin^2 x = \frac{1}{16} + \frac{\cos(2x)}{32} - \frac{\cos(4x)}{16} - \frac{\cos(6x)}{32}$$

$$2/ \sin(5x) = 16 \sin(x)^5 - 20 \sin(x)^3 + 5 \sin(x).$$

Exercice 21 Équation trigonométrique

$$\text{Soit } a \in \mathbb{R}. \text{ Résoudre : } \begin{cases} \cos(a) + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin(a) + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0. \end{cases}$$

Solution:

$$x = -y = \pm \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Exercice 22 $\sum \cos^{2p}(x + k\pi/2p)$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1/ Simplifier $\cos^4 \theta + \cos^4(\theta + \frac{\pi}{4}) + \cos^4(\theta + \frac{2\pi}{4}) + \cos^4(\theta + \frac{3\pi}{4})$.

Solution:

$$S = \frac{3}{2}.$$

2/ Simplifier $\cos^6 \theta + \cos^6(\theta + \frac{\pi}{6}) + \dots + \cos^6(\theta + \frac{5\pi}{6})$.

Solution:

$$32 \cos^6(\theta) = \cos 6\theta + 6 \cos 4\theta + 15 \cos 2\theta + 10. \quad S = \frac{15}{8}.$$

3/ Simplifier $\cos^{2p} \theta + \cos^{2p}(\theta + \frac{\pi}{2p}) + \dots + \cos^{2p}(\theta + \frac{(2p-1)\pi}{2p})$.

Solution:

$$S_p = \frac{p}{2^{2p-1}} \binom{2p}{p}.$$

Exercice 23 $\sum \cos(kx) / \cos x^k = 0$

Résoudre : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0$.

Solution:

$$x = 0 \pmod{\frac{\pi}{n}}, x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Exercice 24 $z = (1 + ia)/(1 - ia)$

Soit $z \in \mathbb{U}$. Peut-on trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $z = \frac{1 + ia}{1 - ia}$?

Solution:

$$z = e^{i\theta}, a = \tan \frac{\theta}{2} \text{ pour } \theta \not\equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

Exercice 25 Points cocycliques

Dans le plan complexe rapporté au R.O.N. $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $U(1), V(i), M(z), M'(z'), P(zz')$ où z et z' sont 2 nombres complexes distincts et différents de 0 et de 1.

1/ Déterminer l'ensemble des points M tels que $\frac{z-i}{z-1}$ soit un imaginaire pur non nul.

2/ Démontrer que M, M', P sont distincts 2 à 2 .

3/ Démontrer que $\arg \frac{zz' - z'}{zz' - z} = \arg \frac{z'}{z' - 1} - \arg \frac{z}{z - 1} \pmod{2\pi}$.

4/ En déduire que M, M', P sont alignés si et seulement si les points O, U, M, M' sont alignés ou cocycliques .