Chapitre 1

Logique - Raisonnements

1 Éléments de logique

1.1 Assertions- Règles logiques

Définition 1.1 (Assertion)**.**
On appelle proposition *ou* assertion *une affirmation à laquelle on peut attacher une valeur de vérité : soit vraie soit fausse, pas les deux en même temps.*

Soit P une proposition , on appelle *table de vérité* de P la table :

P
V
F

Figure 1.1 – Table de vérité de « P »

Exemples :
— « *3 est un nombre impair* » (*proposition vraie*)
— « *Paris est la capitale de l'Italie* » (*proposition fausse*)
— « *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $x^2 \geqslant 0$. » (*proposition vraie*)

Règles logiques : on admet les règles suivantes
— *principe d'identité* : « A » est « A »
— *principe de non contradiction* : on ne peut avoir P vrai et P faux en même temps
— *principe du tiers exclu* : une proposition qui n'est pas vraie est fausse et une proposition qui n'est pas fausse est vraie .

1.2 Opérateurs logiques

Les opérateurs logiques permettent de combiner des propositions pour en obtenir de nouvelles :

1.2.1 La négation « *non* »

la négation d'une proposition P est notée « non P » ou « $\neg P$ » ou « $\overline{P}$ ».
L'assertion « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	V	F
$\neg P$	F	V

Figure 1.2 – Table de vérité de « *non* P »

D'autres opérateurs logiques

— *conjonction* : « et » notée $\wedge$;
— *disjonction inclusive* : « ou » notée $\vee$
— *implication* : notée $\Longrightarrow$
— *équivalence* : notée $\Longleftrightarrow$

ils sont définis par la *table de vérité* :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

FIGURE 1.3 – Table de vérité d'opérateurs logiques

Remarque. L'*implication* est aussi définie par l'assertion suivante :

$$\boxed{\text{« } \textit{(non } P\textit{) ou } Q \text{ » notée aussi « } (\neg P) \vee Q \text{ »}}$$

L'assertion « $P \Longrightarrow Q$ » se lit en français « P *implique* Q ».
Elle se lit souvent aussi « *si* P *est vraie alors* Q *est vraie* » ou « *si* P *alors* Q ».

Exemples 1.1.

1. *« $x^2 \leqslant 25 \Longrightarrow -5 \leqslant x \leqslant 5$ » est vraie (prendre la racine carrée).*
2. *« $x \in]-\infty, -4[\Longrightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$ » est vraie (étudier le binôme).*
3. *« $\sin(\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = 0$ » est fausse (regarder pour $\theta = \pi$ par exemple).*
4. *« (Paris est la capitale de l'Italie) $\Longrightarrow$ (je suis le roi d'Espagne) » est vraie ! En effet, si P est fausse alors l'assertion « $P \Longrightarrow Q$ » est toujours vraie.*

Remarque.
L'*équivalence* est aussi définie par l'assertion suivante :

$$\boxed{\text{« } (P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P) \text{ »}}$$

L'assertion « $P \Longleftrightarrow Q$ » se lit en français « P *est équivalent à* Q » ou « P *équivaut à* Q » ou « P *si et seulement si* Q ».

Par exemple :
— Pour deux réels a, b, l'équivalence « $a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow (a = 0$ *ou* $b = 0)$ » est vraie.
— Pour un réel a, l'équivalence « $a^2 = 4 \Longleftrightarrow a = 2$ » est fausse.

Remarque. une proposition toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent est appelée *tautologie*.

Voici quelques exemples de tautologie

Proposition 1.1.
Soient P, Q, R trois assertions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1. $P \iff \text{non}(\neg P)$
2. $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$
3. $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$
4. $\neg(P \text{ et } Q) \iff (\neg P) \text{ ou } (\neg Q)$ *(*Loi de Morgan*)*
5. $\neg(P \text{ ou } Q) \iff (\neg P) \text{ et } (\neg Q)$ *(*Loi de Morgan*)*
6. $\big(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
7. $\big(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)\big) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
8. « $P \implies Q$ » $\iff$ « $\neg Q \implies \neg P$ » *(*Contraposition*)*
9. $\neg(P \implies Q) \iff (P \text{ et } \neg Q)$ *(*Négation d'une implication*)*
10. $\big((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R)\big) \iff (P \implies R)$ *(*Transitivité*)*

1.3 Quantificateurs

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x . On introduit deux nouveaux opérateurs

Le quantificateur $\forall$: « *pour tout* »

L'assertion

$$\forall x \in E, \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

On lit « *Pour tout x appartenant à E, $P(x)$* », sous-entendu « *Pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie* ».

Exemple 1.2.

1. « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(x \leqslant -2 \implies (x^2 \geqslant 1)\big)$ » *est une assertion vraie.*
2. « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 \geqslant 1)$ » *est une assertion fausse.*

Le quantificateur $\exists$: « *il existe* »

L'assertion

$$\exists x \in E, \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit « *il existe au moins un x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie)* ».

Par exemple :

— « $\exists x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 + x < 0)$ » est vraie (par exemple $x = -\dfrac{1}{2}$ vérifie bien la propriété).

— « $\exists x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 < 0)$ » est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).

Remarque. Quand on écrit « $\exists x \in \mathbb{R} \quad (f(x) = 0)$ » cela signifie juste qu'il existe un réel pour lequel f s'annule. Rien ne dit que ce x est unique. Afin de préciser que f s'annule en une unique valeur, on rajoute un point d'exclamation :

$$\exists!\, x \in \mathbb{R}, \quad (f(x) = 0).$$

La négation des quantificateurs

La négation de « $\forall x \in E, \quad P(x)$ » est « $\exists x \in E, \quad \neg P(x)$ » .

Par exemple la négation de :

$$« \forall x \in [1, +\infty[, \quad (x^2 \geqslant 1) »$$

est l'assertion :

$$« \exists x \in [1, +\infty[, \quad (x^2 < 1) ».$$

En effet la négation de $x^2 \geqslant 1$ est $\neg(x^2 \geqslant 1)$ mais s'écrit plus simplement $x^2 < 1$.

La négation de « $\exists x \in E, \quad P(x)$ » est « $\forall x \in E, \quad \neg P(x)$ ».

Voici des exemples :

— La négation de « $\exists z \in \mathbb{C}, \quad (z^2 = -1)$ » est « $\forall z \in \mathbb{C}, \quad (z^2 \neq -1)$ ».

— La négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 \geqslant 0)$ » est « $\exists x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 < 0)$ ».

— On peut ainsi écrire la négation de propositions complexes. Pour l'assertion :

$$\forall k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists a > 0, \quad (|x| < a \implies x^2 < k)$$

sa négation est

$$\exists k \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall a > 0, \quad (|x| < a \text{ et } x^2 \geqslant k).$$

Pour la négation d'une phrase logique, on change le « *pour tout* » en « *il existe au moins un* » et inversement, puis on prend la négation de l'assertion P.

Attention

- L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbf{N}, \quad (n \geqslant a) \qquad \text{et} \qquad \exists n \in \mathbf{N}, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad (n \geqslant a).$$

  sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse.
  En effet, une phrase logique se lit de gauche à droite, ainsi la première phrase affirme : « *Pour tout réel a, il existe un entier naturel n (qui peut donc dépendre de a) tel que $n \geqslant a$.* » (par exemple on peut prendre $n = E(a) + 1$). C'est donc une phrase vraie. Par contre la deuxième se lit : « *Il existe un entier naturel n, tel que pour tout réel a, $n \geqslant a$.* » Cette phrase est fausse, car il suffit de prendre $x = n + 1$ pour se convaincre que l'inégalité n'est pas vérifiée !
- Deux quantificateurs de même nature peuvent être permutés.
- La négation de l'inégalité stricte « $<$ » est l'inégalité large « $\geqslant$ », et inversement.
- Évitez d'écrire des phrases en français en même temps que des quantificateurs logiques, il faut donc choisir une de ces deux formes.
- Évitez d'utiliser des quantificateurs en guise d'abréviations.

Conseils pour la rédaction

— pour passer d'une ligne à l'autre d'un raisonnement, préférez au symbole logique « $\implies$ » l'une des assertions suivantes :
« *donc* », « *par suite* », « *il vient* », « *d'où* », « *on en déduit que* » , « *alors* », « *il en résulte* », « *par conséquent* », « *ce qui entraîne* ».

— De même, préférez (sauf si c'est une résolution d'équation) au symbole logique « $\iff$ » l'une des assertions suivantes :
« *équivaut à* », « *soit* », « *ou encore* », « *signifie que* », « *si, et seulement si* », « *qui s'écrit* », « *pour que ... il faut et il suffit que ...* » .

— Il est incorrect d'écrire $\nexists, \not\Longrightarrow$. Ces symboles n'existent pas !

Exercices d'application.

1. *Écrire la table de vérité du* « ou exclusif ». *Que remarquez vous ?*
2. *Démontrer les assertions restantes de la proposition 1.1.*
3. *Écrire à l'aide des quantificateurs la phrase suivante :* « Pour tout nombre réel, son carré est positif ». *Puis écrire la négation.*
4. *Mêmes questions avec les phrases :* « Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1 ». *Puis* « Pour tout entier n, il existe un unique réel x tel que $\exp(x)$ égale n ».

2 Raisonnements

Voici des méthodes classiques de raisonnements.

2.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion « $P \implies Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre par un raisonnement logique qu'alors Q est vraie.

Exemple 2.1. *Montrer que si $a, b \in \mathbf{Q}$ alors $a+b \in \mathbf{Q}$.*

2.2 Disjonction des cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A.

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n(n+1)$ est pair.

Exemple 2.2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n(n+1)$ est pair.*

Exemple 2.3. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.*

2.3 Contraposée

Le raisonnement par *contraposition* est basé sur l'équivalence suivante (voir la proposition 1.1) :

$$\boxed{\text{L'assertion « } P \implies Q \text{ » est équivalente à « } \neg Q \implies \neg P \text{ ».}}$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « $P \implies Q$ », on montre en fait que si $\neg Q$ est vraie alors $\neg P$ est vraie.

Exemple 2.4. *Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.*

2.4 Absurde

Le *raisonnement par l'absurde* pour montrer « $P \implies Q$ » repose sur le principe que la négation de l'implication est fausse, autrement dit : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction.

Exemple 2.5. *Soient $a, b \geqslant 0$. Montrer que si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ alors $a = b$.*

Dans la pratique, on peut choisir indifféremment entre un raisonnement par contraposition ou par l'absurde. Attention cependant de bien préciser quel type de raisonnement vous choisissez et surtout de ne pas changer en cours de rédaction !

2.5 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E, \quad P(x)$ » est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Rappelez-vous la négation de « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est « $\exists x \in E \quad \neg\, P(x)$ ». Trouver un tel x c'est trouver un *contre-exemple* à l'assertion « $\forall x \in E, \quad P(x)$ ».

Exemple 2.6. *Montrer que l'assertion suivante est fausse* « Pour tout entier naturel n, si n est divisible par 4 et par 6, alors n est divisible par 24 ».

2.6 Récurrence

Le *principe de récurrence* permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant d'un entier n, est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en quatre étapes :

1. l'*initialisation* on prouve que $P(0)$ est vraie ;
2. l'*hypothèse de récurrence* on suppose que pour n donné, $P(n)$ est vraie ;
3. on établit l'*hérédité*, c'est-à-dire que l'assertion $P(n+1)$ au rang suivant est vraie.
4. Enfin dans la *conclusion*, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exemple 2.7. *Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $2^n > n$.*

Remarques :
- La rédaction d'une récurrence est assez rigide. Respectez scrupuleusement la rédaction proposée : donnez un nom à l'assertion que vous souhaitez montrer (ici $P(n)$), respectez les trois étapes (même si souvent l'étape d'initialisation est très facile). En particulier méditez et conservez la première ligne de l'hérédité « Fixons $n \geqslant 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie. »
- Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, alors on commence l'initialisation au rang n_0.
- Le principe de récurrence est basé sur la construction de l'ensemble $\mathbf{N}$. En effet un des axiomes pour définir $\mathbf{N}$ est le suivant : « *Soit A une partie de $\mathbf{N}$ qui contient 0 et telle que si $n \in A$ alors $n+1 \in A$. Alors $A = \mathbf{N}$* ».

2.7 Raisonnement par analyse et synthèse

Le *principe du raisonnement par analyse et synthèse* permet d'établir l'existence et l'unicité d'une solution d'un problème. La démonstration se déroule en deux étapes :

1. *Étape d'analyse* :
   on suppose l'existence de la solution, on analyse ce que cela induit afin de trouver une condition nécessaire. Cette étape assure l'unicité de la solution recherchée.
2. *Étape de synthèse* :
   on montre que la condition trouvée dans l'étape 1 est suffisante, ce qui assure l'existence de la solution au problème

Exemple 2.8. *Montrer que pour toute application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, il existe deux applications g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, l'une paire et l'autre impaire telles que $f = g + h$.*

Exercices d'application.

1. *(Raisonnement direct) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leqslant b$ alors $a \leqslant \dfrac{a+b}{2} \leqslant b$ et $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$.*
2. *(Absurde) Soit un réel x : montrer que si $x^2 = 2$, alors x n'est pas un rationnel, c'est-à-*

dire $x \notin \mathbf{Q}$.

3. *(Absurde) Soit* $n \in \mathbf{N}^*$. *Montrer que* $\sqrt{n^2+1}$ *n'est pas un entier.*
4. *(Contre-exemple) Est-ce que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a* $x < 1 \implies x^2 < 1$ *?*
5. *(Récurrence) Montrer que pour tout* $n \geqslant 1$, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
6. *(Récurrence) Fixons un réel* $x \geq 0$. *Montrer que pour tout entier* $n \geqslant 1$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.