TD 14 : Limite et continuité

Exercice 1

Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes en a :

1/ $f_1(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ $\quad a = 2$ **2/** $f_2(x) = \dfrac{x^2+2|x|}{x}$ $\quad a = 0$

3/ $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ $\quad a = 0$ **4/** $f_4(x) = \dfrac{x-1}{x^n-1}$ $\quad a = 1$ et $n \in \mathbf{N}^*$

5/ $f_5(x) = \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$ $\quad a = 0$ **6/** $f_6(x) = \dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$ $\quad a = \dfrac{\pi}{4}$

7/ $f_7(x) = (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$ $\quad a = 0$

Exercice 2

Déterminer l'ensemble de définition et de continuité de chacune des fonctions suivantes.

Étudier ensuite les éventuels prolongements par continuité (dès que possible) et les branches infinies.

1/ $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2+x}}{x}$ **3/** $f(x) = \exp(-\dfrac{1}{x})$ **5/** $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{3x^2}$

2/ $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^{x-1}-1}$ **4/** $f(x) = \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$ **6/** $f(x) = \dfrac{\arcsin^2(2x)}{x\left(\sqrt{x+9}-3\right)}$

Exercice 3

1/ Déterminer l'ensemble de continuité de la fonction suivante : $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

2/ Déterminer l'ensemble de définition et de continuité de la fonction suivante puis étudier les éventuels prolongements par continuité dès que possible : $x \mapsto \dfrac{\lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2}{x}$.

Exercice 4

Soit f continue sur$[a, b]$ montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(a) - 2f(c) + f(b) = 0$.

Exercice 5

1/ Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $\mathrm{e}^x + x - n = 0$ a une unique solution dans $\mathbf{R}$; on notera u_n cette solution.

2/ Étudier la limite de la suite (u_n) et montrer que $\lim \dfrac{u_n}{\ln n} = 1$.

Exercice 6

Un alpiniste commence l'ascension d'une montagne à 8 heures du matin et atteint le sommet à 8 heures du soir. Il redescend le lendemain matin à 8 heures en suivant le même chemin.

Montrer qu'il existe une altitude où l'alpiniste s'est trouvé d'un jour sur l'autre à la même heure à la montée et à la descente.

Exercice 7

Soit sh la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$

1/ Démontrer que sh est une bijection de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

2/ Déterminer une expression logarithmique de la réciproque sh^{-1} de sh (notée argsh).

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie si possible par $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f : x \mapsto x|\ln(x)|$$

1/ Que dire de cette suite si $u_0 \in \{\mathrm{e}, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\}$?

2/ On suppose ici que $u_0 \in]0, 1[$.

a) Donner l'expression de $f(x)$ sans valeur absolue pour $0 < x \leqslant 1$.

b) Étudier les variations de f et le signe de $g(x) = f(x) - x$ sur $]0, 1]$.

c) Démontrer que (u_n) converge que que soit le choix de $u_0 \in]0, 1[$. Donner sa limite.

3/ On suppose ici que $u_0 \in]\,\mathrm{e}, +\infty[$.

a) Étudier les variations de f et le signe de $g(x) = f(x) - x$ sur $[1, +\infty[$.

b) Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$ quel que soit le choix de $u_0 > e$.

4/ On suppose ici que $u_0 \in]1, \mathrm{e}[$.

a) Démontrer, en utilisant 3, le théorème des valeurs intermédiaires et un raisonnement par récurrence, qu'il existe une suite strictement croissante (λ_k), et qu'elle est définie sinon. On notera dans ce qui suit I la partie de $\mathbf{R}$ définie par l'ensemble des réels de l'intervalle $]1, \mathrm{e}[$ qui ne sont pas des termes de la suite (λ_k) et on supposera désormais que $u_0 \in I$.

b) Démontrer pas l'absurde que (u_n) ne peut pas être minorée par 1.

c) En déduire qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $0 < up < 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant p, 0 < u_n < 1$.

d) Montrer que (u_n) converge pour tout u_0 dans I et donner sa limite.