Table des matières

Chapitre 14

Limite et continuité

Dans ce chapitre (sauf la dernière partie), on considère des fonctions de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définies sur une partie I qui est un intervalle de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux points ou une réunion de tels intervalles.

Rappel : (Intervalle de $\mathbf{R}$).

On appelle intervalle de $\mathbf{R}$ toute partie I de $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x, y, z \in \mathbf{R},\ (x \in I,\ y \in I \text{ et } x \leqslant z \leqslant y) \implies z \in I.$$

1 Limite d'une fonction

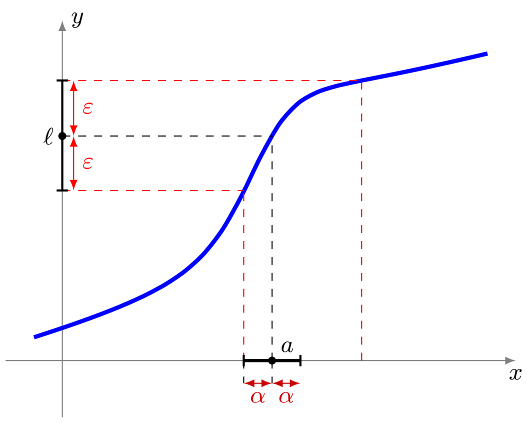
1.1 Limite finie

Soit $a \in \mathbf{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition 1.1 (Limite finie en un point)**.**
Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que f ***admet*** *ℓ* ***pour limite en*** *a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

On dit aussi que $f(x)$ ***tend vers*** *$\ell \in \mathbf{R}$* ***lorsque*** *x* ***tend vers*** *a. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou bien $\lim\limits_{a} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.*



Remarques.

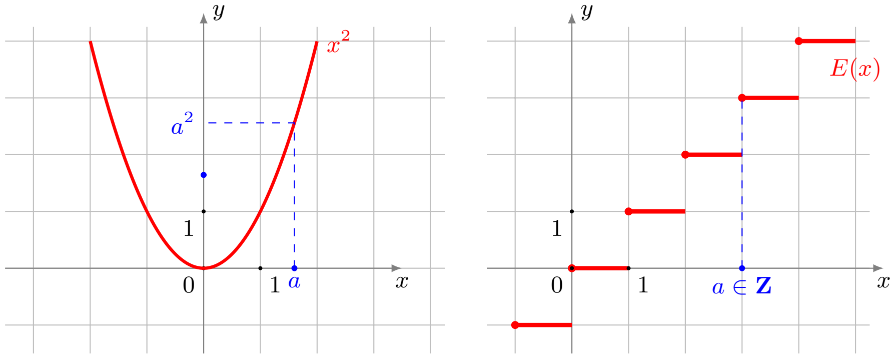
— *L'inégalité* $|x-a| \leqslant \alpha$ *équivaut à* $x \in [a-\alpha, a+\alpha]$. *L'inégalité* $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$ *équivaut à* $f(x) \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$.

— *On peut remplacer certaines inégalités larges « $\leqslant$ » par des inégalités strictes « $<$ » dans la définition :* $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x-a| < \alpha \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon)$

— *L'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas permuter le* $\forall\varepsilon$ *avec le* $\exists\alpha$ *: le* α *dépend en général du* ε.

Exemple 1.1.

1. $\lim_{x\to 2}(2x-1) = 3$, $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$ *(*$a \in \mathbf{R}$*)*,
2. *la fonction partie entière* E *n'a pas de limite aux points* $a \in \mathbf{Z}$.



Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition 1.2 (Limite finie en l'infini)**.**
Soit $\ell \in \mathbf{R}$. *On dit que* f ***admet*** ℓ ***pour limite en*** *:*

(*i*) $+\infty$ *si*

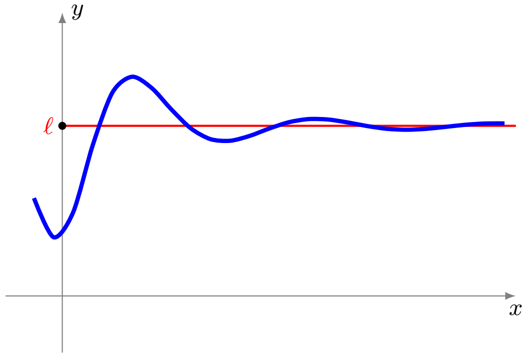
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I, \quad (x \geqslant B \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

(*ii*) $-\infty$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B < 0, \quad \forall x \in I, \quad (x \leqslant B \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

On note alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$.



1.2 Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]c, a[\cup]a, b[$.

Définition 1.3 (Limite à gauche et à droite d'une fonction en un point).

(i) *On appelle* ***limite à droite*** *en a de f la limite de la fonction $f_{\big|]a,b[}$ en a et on la note $\lim\limits_{a^+} f$.*

(ii) *On définit de même la* ***limite à gauche*** *en a de f : la limite de la fonction $f_{\big|]c,a[}$ en a et on la note $\lim\limits_{a^-} f$.*

(iii) *On note aussi $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ pour la limite à gauche.*

Remarque. (utilisation pratique)

Uniquement pour les limites à gauche :

— Si $\ell \in \mathbf{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in I, \ (a - \alpha \leqslant x < a \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$

— Si $\ell = +\infty$: $\forall A > 0, \exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in I, \ (a - \alpha \leqslant x < a \Longrightarrow f(x) \geqslant A)$

— Si $\ell = -\infty$: $\forall A < 0, \exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in I, \ (a - \alpha \leqslant x < a \Longrightarrow f(x) \leqslant A)$

Dire que $f : I \to \mathbf{R}$ admet une limite $\ell \in$ à droite en a signifie donc :

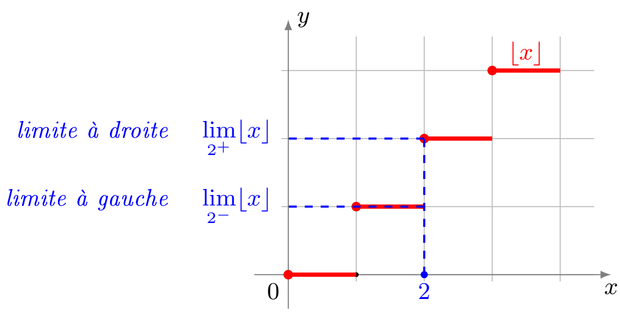
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad a < x < a + \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Exemple 1.2. *Considérons la fonction partie entière au point $x = 2$:*

— *comme pour tout $x \in]2, 3[$ on a $\lfloor x \rfloor = 2$, on a $\lim\limits_{2^+} \lfloor x \rfloor = 2$,*

— *comme pour tout $x \in [1, 2[$ on a $\lfloor x \rfloor = 1$, on a $\lim\limits_{2^-} \lfloor x \rfloor = 1$.*

Ces deux limites étant différentes, on en déduit que $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'a pas de limite en 2.



Théorème 1.1. *(Lien entre limite / limites à gauche et à droite.)*
Soient $f : I \longmapsto \mathbf{R}$, a un point ou une extrémité de I (sauf $\pm\infty$) et $\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.
Si la fonction f a une limite en a, alors ses limites à gauche et à droite en a coïncident et valent $\lim\limits_{a} f$.
Réciproquement, si f a une limite à gauche et une limite à droite en a et si ces limites valent $f(a)$ (si f est bien définie en a) alors f admet une limite en a.

$$\lim_{a} f = \ell \iff \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell$$

Exemples 1.3.

1. *Étudier la fonction inverse en 0.*
2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.*

   Étudier la limite éventuelle de f en 0.

1.3 Limite infinie

Définition 1.4 (Limite infinie en un point)**.**

(*i*) *On dit que f* ***a pour limite*** $+\infty$ ***en*** *a si*

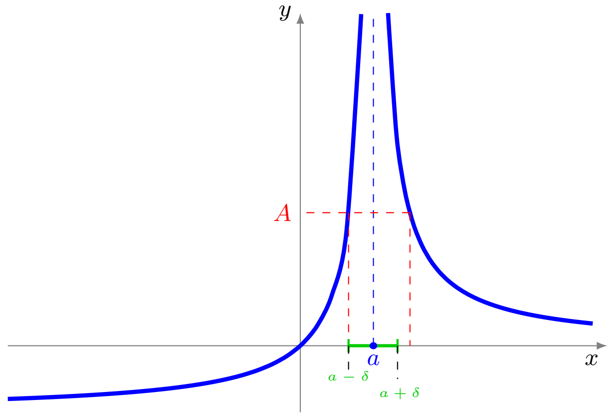
$$\forall A > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| < \alpha \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

(*ii*) *On dit que f* ***a pour limite*** $-\infty$ ***en*** *a si*

$$\forall A > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| < \alpha \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.



Exemple 1.4.

Prouver que : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

Exemple 1.5. *On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geqslant 1$:*

— $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

— $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0$.

Exemple 1.6. *Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n > 0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $b_m > 0$.*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

1.4 Propriétés des fonctions de limite finie

Théorème 1.2. *(Unicité de la limite.)*
Soient $f : I \longmapsto \mathbf{R}$, a un point ou une extrémité de I (y-compris $\pm\infty$).
Si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.

Exemples 1.7.

1. *Prouver que :* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{x^2-4x+4} = +\infty$.
2. *Prouver que :* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+2} = 1$.

Théorème 1.3. *(Limite et caractère borné.)*
Soient $f : I \longmapsto \mathbf{R}$, a un point ou une extrémité de I (y-compris $\pm\infty$).
Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Théorème 1.4. *(Limite en une valeur où f est définie.)*
Soit $f : I \longmapsto \mathbf{R}$.
Si f est définie en a et admet une limite en a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2 Manipulations des limites

2.1 Limites et inégalités

Théorème 2.1. *(Limites et inégalités strictes.)*
Soient $f : I \longmapsto \mathbf{R}$, a un point ou une extrémité de I (y compris $\pm\infty$), $m \in \mathbf{R}$ et $M \in \mathbf{R}$.

(i) ***Si*** $\lim\limits_{a} f > m$, ***alors*** $f(x) > m$ *au voisinage de a.*
(ii) ***Si*** $\lim\limits_{a} f < M$, ***alors*** $f(x) < M$ *au voisinage de a.*

Remarque.
En particulier si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$ alors f ne s'annule pas au voisinage de a.

Théorème 2.2. *(Limites et inégalités larges.)*
Soient $f, g : I \longmapsto \mathbf{R}$, a un point ou une extrémité de I (y-compris $\pm\infty$).
Supposons que f et g admettent des limites finies en a.
Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{a} f \leqslant \lim\limits_{a} g$.

Remarques.

1. *On utilise souvent la propriété avec f (ou g) constante.*
2. *Attention c'est faux avec inégalités strictes.*

   Par exemple : pour tout $x > 0$ on a : $f(x) = 0 < \dfrac{1}{x} = g(x)$, *mais :* $\lim\limits_{+\infty} f \leqslant \lim\limits_{+\infty} g$.

2.2 Opérations sur les limites

ℓ, ℓ' et λ sont trois réels.

Les opérations sur les limites sont récapitulées dans les tableaux ci-dessous, en supposant bien sûr l'existence des limites. F.I. désigne une forme indéterminée.

Somme :

$\lim\limits_{x\to a} f$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Produit :

$\lim\limits_{x\to a} f$	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a}(fg)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Multiplication par un réel :

	$\lambda>0$			$\lambda=0$	$\lambda<0$		
$\lim\limits_{x\to a} f$	$+\infty$	ℓ	$-\infty$	Toute limite	$+\infty$	ℓ	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \lambda f$	$+\infty$	$\lambda\ell$	$-\infty$	0	$-\infty$	$\lambda\ell$	$+\infty$

Quotient :

$\lim\limits_{x\to a} f$	ℓ	$\ell\neq 0$ ou $\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g$	$\ell'\neq 0$	0	$\ell'\neq 0$ ou $\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$sgn(fg)\infty$	0	F.I.	F.I.

Remarques.

— *Dans chacune des cases où apparait une forme indéterminée, on peut obtenir n'importe quel résultat.*
Par exemple dans le cas de la somme, pour f et g définies sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

1. $f(x)=x+1$ *et* $g=-x$, $\lim\limits_{x\to 0}(f+g)=1$
2. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ *et* $g=-x$, $\lim\limits_{x\to 0}(f+g)=+\infty$
3. $f(x)=x+\cos(x)$ *et* $g=-x$, $(f+g)$ *n'a pas de limite.*

Théorème 2.3. *(Composition de limites.)*
Soient $f : I \longmapsto J$, a un point ou une extrémité de I (y-compris $\pm\infty$), $h : J \longmapsto \mathbf{R}$, b un point ou une extrémité de J (y-compris $\pm\infty$) et $c\in\mathbf{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$.
Si $\lim\limits_{a} f=b$ et $\lim\limits_{b} h=c$, alors $\lim\limits_{a} h\circ f=c$.

3 Continuité en un point

3.1 Définitions

Définition 3.1. *(Continuité en un point.)*

(i) *On dit que f est **continue** en $a \in I$ si f admet une limite finie en a ($\lim\limits_{a} f = f(a)$). Autrement dit :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon)$$

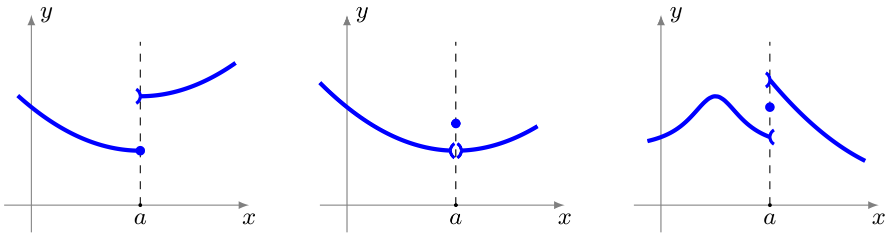
(ii) *On dit que f est **continue à droite** en $a \in I$ si f admet une limite finie en a^+ ($\lim\limits_{a^+} f = f(a)$).*

(iii) *On dit que f est **continue à gauche** en $a \in I$ si f admet une limite finie en a^- ($\lim\limits_{a^-} f = f(a)$).*

Visualisation :

La représentation graphique d'une fonction continue est tracée « sans lever » le crayon, ou encore « sans trou ».

Voici des fonctions qui ne sont pas continues en a :



Exemple 3.1. *Les fonctions suivantes sont continues en tout point $a \in \mathbf{R}$:*

— *une fonction constante,*
— *la fonction identité,*
— *la fonction carrée $x \mapsto x^2$,*
— *l'application valeur absolue.*

Par contre, la fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue aux points $a \in \mathbf{Z}$, mais elle est continue en $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

Théorème 3.1. *(Caractérisation de la continuité avec les continuités à gauche et à droite.) Supposons f définie au voisinage de a à gauche et à droite.*
On a l'équivalence entre :

(i) *f continue en a.*

(ii) *f continue à droite et à gauche en a.*

3.2 Opérations

Proposition 3.1.
Soient f et g deux fonctions continues en un point a, on a :

(i) *$f+g$, $f \times g$ et λf ($\lambda \in \mathbf{R}$) sont continues en a ;*

(ii) *si de plus $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en a.*

Proposition 3.2 (Fonctions de référence).
Les fonctions polynômiales, rationnelles, valeur absolue, sinus, cosinus, tangente, arcsinus, arccosinus, arctangente, exponentielles, cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique, logarithmes, puissances sont continues en tout point où elles sont définies.

Proposition 3.3 (Composition).
Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

3.3 Prolongement par continuité en un point

Définition 3.2 (Prolongement par continuité).
Soit f définie sur un intervalle I privé de a ($a \notin I$ et a est une extrémité de I) et admettant une limite en a. La fonction g définie sur I par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \lim\limits_a f & \text{si } x = a \end{cases}$ est appelée ***prolongement par continuité*** *de f en a.*
On notera souvent par abus de notation ce prolongement par continuité f au lieu de g.

Remarque. f est prolongeable par continuité en une extrémité a de son intervalle de définition si et seulement si f admet une limite finie en a.

Exemple 3.2.

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$

f n'est pas définie en 0, mais $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

f est donc prolongeable par continuité en 0 en posant, si l'on note g le prolongement, $g(0) = 0$.

On a ainsi $g : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$

Exemple 3.3.
Soit f d'expression : $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}})$
Déterminer l'ensemble de définition de f, puis si elle est prolongeable par continuité et enfin l'ensemble sur lequel elle est continue.

3.4 Caractérisation séquentielle

Théorème 3.2. *(Caractérisation par les suites.)*
Soit $a \in I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *f continue en a ;*

(ii) *pour toute suite (u_n) à valeurs dans I, si $u_n \longrightarrow a$ alors $f(u_n) \longrightarrow f(a)$.*

Remarque. Une des applications de ce théorème est le résultat suivant :
Si f est continue sur I et si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. Par conséquent, si une suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est continue, alors $u_n \to \ell$, entraîne que $f(\ell) = \ell$.

4 Continuité sur un intervalle

4.1 Définition

Définition 4.1.
*On dit que f est **continue sur un intervalle** I lorsque f est continue en tout point de I.*
On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ ou $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ ou $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Remarque. si $I =]a, b]$, f continue sur I signifie que f est continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en b.

Exemple 4.1. *Soient $k > 0$ et f une fonction définie sur un intervalle I telle que :*

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

Montrer que f est continue sur I. (on dit alors que f est k-lipschitzienne).

Exemple 4.2. *(Fonction discontinue en tout point de son ensemble de définition.)*

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ f : x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbf{Q} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q} \end{cases}$. *f est discontinue en tout point de $\mathbf{R}$.*

4.2 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 4.1 (Opérations sur les fonctions continues)**.**
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, on a :

(i) $f + g$, $f \times g$ *et* λf ($\lambda \in \mathbf{R}$) *sont continues sur I ;*

(ii) si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.

Proposition 4.2 (Composition)**.**
Si f est continue sur un intervalle I et g continue $f(I)$ alors $g \circ f$ est continue en I.

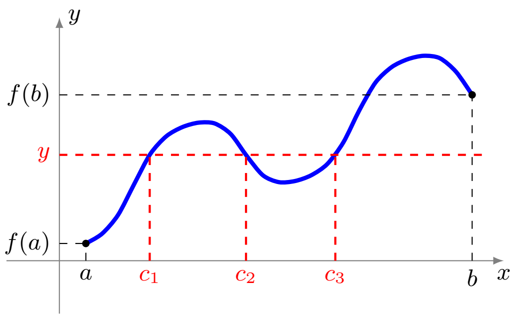
Remarque. Les fonctions usuelles sont continues sur leurs ensembles de définition.

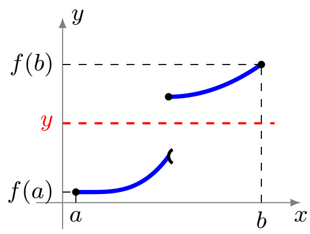
4.3 Théorème des valeurs intermédiaires et applications

Théorème 4.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
Si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.
Autrement dit :
Pour tout $(a, b) \in I^2$, f prend prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

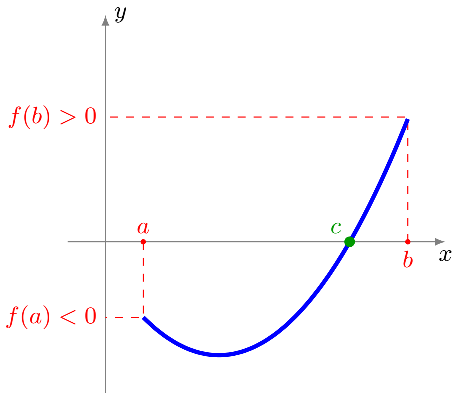
Remarque. Si f est continue sur $[a, b]$, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$ (figure de gauche).

Par contre, si la fonction f n'est pas continue, le théorème n'est plus vrai (figure de droite).





Théorème 4.2 (Théorème de Bolzano)**.**
Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



Exemple 4.3. Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Exemple 4.4.
Démontrer que l'équation $\mathrm{e}^{-x} = x$ *possède une solution dans* $]0; 1[$.

Théorème 4.3 (Théorème du point fixe)**.**
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$ à valeur dans I (c'est-à-dire $f(I) \subset I$). Alors il existe au moins un point $c \in I$ tel que $f(c) = c$. Un tel point s'appelle ***un point fixe****.*

Attention
Si l'intervalle I n'est pas un segment, le théorème n'est pas valide. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ sur $I =]0, 1[$ vérifie bien $f(I) = I$, mais ne possède pas de point fixe dans cet intervalle

Théorème 4.4 (Image d'un segment par une application continue)**.**
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Autrement dit :
toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

4.4 Continuité et bijectivité

Théorème 4.5 (Application continue et monotone)**.**
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f établit une bijection de I sur $f(I)$ et f^{-1} est une bijection continue et strictement monotone de $f(I)$ sur I variant dans le même sens que f. Toute fonction f continue et strictement monotone sur

Remarque. Soit f une fonction continue et strictement croissante sur I :

(i) si $I = [a, b]$ alors $f(I) = [f(a), f(b)]$
(ii) si $I =]a, +\infty[$ alors $f(I) =]\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{+\infty} f[$
(iii) etc.

Exemple 4.5. *Soit $f(x) = -3 + \ln x + 2x^3$ montrer que f établit une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur une partie de J de $\mathbf{R}$ à déterminer.*

5 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

On considère dans ce dernier paragraphe que f est une fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$ définie sur une partie I qui est un intervalle de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux points ou une réunion de tels intervalles.

Soit $a \in \mathbf{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition 5.1 (Limite finie en un point)**.**
*Soit $\ell \in \mathbf{C}$. On dit que f **admet** ℓ **pour limite en** a et on note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ ou bien $\lim\limits_{a} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ si*

(i) *dans le cas $a \in \mathbf{R}$:*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x - a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\,;$$

(ii) *dans le cas $a = +\infty$:*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in I, \quad (x \geqslant A \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\,;$$

(iii) *dans le cas $a = \infty$:*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in I, \quad (x \leqslant A \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\,;$$

Attention
Dans le cas présent des fonctions à valeurs complexes :
- la notion de limite infinie n'a aucun sens.
- De même, le passage des inégalités à la limites ou le théorème de l'encadrement n'ont aussi aucun sens.

Proposition 5.1 (Limite et parties réelle et imaginaire)**.**
Soient $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$, $a \in I$ ou une extrémité de I (y compris $\pm\infty$) et ℓ un nombre complexe.

$$\lim_{a} f = \ell \iff \lim_{a}(\mathrm{Re}(f)) = \mathrm{Re}(\ell) \quad \textit{et} \quad \lim_{a}(\mathrm{Im}(u_n)) = \mathrm{Im}(\ell).$$

Théorème 5.1. *(Limite et caractère borné.)*
Soient $f : I \longmapsto \mathbf{C}$, a un point ou une extrémité finie de I.
*Si f admet une limite **finie** en a alors f est bornée au voisinage de a, autrement dit :*

$$\exists M > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leqslant \alpha \implies |f(x)| \leqslant M).$$

Définition 5.2 (Continuité)**.**
Soient $f : I \longmapsto \mathbf{C}$, a un point ou une extrémité finie de I.

(*i*) *On dit que f est **continue** en $a \in I$ si $\lim\limits_{a} f = f(a)$.*

(*ii*) *On dit que f est continue sur un intervalle I s'il est continue en tout point de I*

Proposition 5.2 (Continuité et parties réelle et imaginaire)**.**
Soient $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$, $a \in I$ ou une extrémité de I (y compris $\pm\infty$) et ℓ un nombre complexe.

$$f \text{ continue en } a \iff \mathrm{Re}(f) \text{ continue en } a \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ continue en } a.$$

Plus généralement :

$$f \text{ continue sur } I \iff \mathrm{Re}(f) \text{ continue sur } I \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ continue sur } I.$$

Attention

Dans le cas d'une fonction continue à valeurs complexes, le théorème des valeurs intermédiaire n'a pas de sens.