Table des matières

Chapitre 19

Intégration

1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

a, b sont deux réels tels que $a < b$.

1.1 Fonction en escalier

Définition 1.1 (Subdivision)**.**
*On appelle **subdivision** d'ordre $n \in \mathbf{N}^*$ d'un segment $[a, b]$ toute suite finie de $n+1$ réels $S_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tels que :*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

*On dit que $S_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est une **subdivision régulière** de $[a, b]$ lorsque, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:*

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}.$$

Remarque. Si S_n est une subdivision régulière de $[a, b]$, alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Définition 1.2 (Fonction en escalier)**.**
*On dit qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est **en escalier** lorsqu' il existe une subdivision S_n de $[a, b]$ tel que :*

$$f \text{ est constante sur }]x_k, x_{k+1}[\text{ pour tout } k \in [\![0, n-1]\!]$$

*Une telle subdivision est dite **adaptée** à f.*
On notera $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Remarque. Il existe en général plus d'une subdivsion adaptée à f.

1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Théorème-Définition 1.1 (Intégrale d'une fonction en escalier).
Soient $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$ et $S_n = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une subdivision adaptée à f.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on note y_k la valeur de f sur $]x_k, x_{k+1}[$.

- *Le réel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} y_k(x_{k+1} - x_k)$ ne dépend pas de la subdivision S_n adaptée à f choisie.*
- *Ce réel est appelé **intégrale** de f sur $[a,b]$ et est noté :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ou } \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ou encore } \int_{[a,b]} f$$

Remarque.

La valeur $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x_{k+1} - x_k)$ représente une somme d'aires algébriques de rectangles.

Théorème 1.1 (Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier).
Soient $f, g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$, avec $a \leqslant b$.

(i) ***Linéarité :*** $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$

(ii) ***Relation de Chasles :*** $\forall c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{[a,b]} f$

(iii) ***Positivité :*** *si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors* $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$

(iv) ***Croissance :*** *si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors* $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$

(v) ***Inégalité et valeur absolue :*** $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$

2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

a, b sont deux réels tels que $a < b$.
L'ensemble des résultats de ce paragraphe seront admis.

2.1 Construction

On va définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment avec les fonctions en escalier.

Pour cela on prouve que toute fonction continue sur un segment peut être approchée par des fonctions en escalier « inférieures » et « supérieures », puis on définit l'intégrale de la fonction avec celles des fonctions en escalier.

Théorème 2.1 (Approximation d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier).
Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b]) \Big/ \begin{cases} \varphi \leqslant f \leqslant \psi \\ \psi - \varphi < \varepsilon \end{cases}$$

Théorème-Définition 2.1 (Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment).
Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.
On pose :

- $\mathcal{E}_-(f) = \{\int_{[a,b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbf{R}),\ \varphi \leqslant f\}$;
- $\mathcal{E}_+(f) = \{\int_{[a,b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbf{R}),\ \psi \geqslant f\}$.

Alors :

(i) $\sup(\mathcal{E}_-(f))$ *et* $\inf(\mathcal{E}_+(f))$ *existent et sont finis ;*
(ii) $\sup(\mathcal{E}_-(f)) = \inf(\mathcal{E}_+(f))$.

Cette valeur commune est appelée ***intégrale*** *de f sur $[a,b]$ et on la note* $\int_{[a,b]} f$.

Définition 2.1 (Notation de l'intégrale d'une fonction continue).
Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.
Pour tous réels $\alpha, \beta \in I$ on note :

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{[\alpha,\beta]} f & \text{si } \alpha < \beta \\ -\int_{[\beta,\alpha]} f & \text{si } \alpha > \beta \\ 0 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

Remarques.

- *Donc par définition, on a* $\int_a^a f = 0$ *et* $\int_b^a f = -\int_a^b f$.
- *l'intégrale de f sur $[a,b]$ représente l'aire algébrique de la partie du plan comprise entre les droites d'équation $x = a$, $x = b$, (Ox) et la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On l'obtient comme limite d'intégrales de fonctions en escalier.*

2.2 Propriété et notation

Théorème 2.2 (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment).
Soient $f, g : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ *deux fonctions continues.*

(i) ***Linéarité :*** $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad \displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$

(ii) ***Relation de Chasles :*** $\forall c \in [a,b], \quad \displaystyle\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{[a,b]} f$

(iii) ***Positivité :*** *si* $f \geqslant 0$ *sur* $[a,b]$, *alors* $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$

(iv) ***Croissance :*** *si* $f \leqslant g$ *sur* $[a,b]$, *alors* $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$

(v) ***Inégalité et valeur absolue :*** $\displaystyle\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$

3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue

Dans le reste de ce chapitre, on suppose que $a \leqslant b$ et non plus $a < b$.

3.1 Linéarité et comparaisons

Proposition 3.1 (Linéarité - Relation de Chasles).
Soient $f, g : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ *deux fonctions continues.*

(i) ***Linéarité :*** $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad \displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$

(ii) ***Relation de Chasles :*** $\forall c \in [a,b], \quad \displaystyle\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{[a,b]} f$

Proposition 3.2 (Positivité - Croissance).
Soient $f, g : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ *deux fonctions continues.*

(i) ***Positivité :*** *si* $f \geqslant 0$ *sur* $[a,b]$, *alors* $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$. *Si de plus, on suppose que* $a < b$ *et qu'il existe* $x_0 \in [a,b]$ *tel que* $f(x_0) > 0$, *alors* $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.

(ii) ***Croissance :*** *si* $f \leqslant g$ *sur* $[a,b]$, *alors* $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$

(iii) ***Inégalité et valeur absolue :*** $\displaystyle\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

Attention

Si l'on a $x_1 \leqslant x_2$, alors :

$$f \leqslant g \text{ sur } [x_1, x_2] \implies \int_{x_2}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x_2}^{x_1} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire (Nullité).
Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

Si f est positive sur $[a,b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$ sur $[a,b]$.

Corollaire (Encadrement).
Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Notons $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. On a :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a).$$

Remarque. En particulier, si $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$, alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f \times g\right| \leqslant \sup_{[a,b]}|f| \times \int_{[a,b]} |g|.$$

On a aussi :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]}|f|.$$

3.2 Valeur moyenne

Définition 3.1 (Valeur moyenne).
Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

La valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est : $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Théorème 3.1 (Théorème de la moyenne).
Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Alors, ol existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.3 Autre inégalité

Théorème 3.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales).
Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On a :

$$\left(\int_a^b f \times g\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2.$$

Il y a égalité s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f = \lambda g$ ou $g = \lambda f$ (c'est-à-dire f et g sont proportionnelles ou l'une des deux fonctions est nulle).

3.4 Application au calcul d'aire

Proposition 3.3 (Intégrale et aire).
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues telles que $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ et $\mathcal{D}$ le domaine délimité par les courbes de f et de g, et les droites d'équation $x = a, x = b$ alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_a^b (g(t) - f(t))\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 3.1. *Soient $f : x \mapsto x^2, g : x \mapsto \sqrt{x}$, déterminer l'aire de la portion de plan comprise entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.*

3.5 Sommes de Riemann

L'intégrale est définie à partir de limites de sommes. Mais maintenant que nous savons calculer des intégrales sans utiliser ces sommes on peut faire le cheminement inverse : calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

Théorème 3.3 (Somme de Riemann).
Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue, alors :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

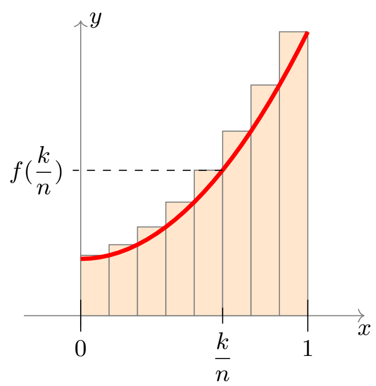
Remarques.

— *La somme S_n s'appelle la* ***somme de Riemann*** *associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$ en n petits intervalles.*

— *Le précédent théorème reste valable si la somme débute à 1 au lieu de 0 ou si la somme finit à n au lieu de $n-1$.*

— *Le cas le plus fréquent est le cas où $a = 0$, $b = 1$ alors $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ et $f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) = f\big(\frac{k}{n}\big)$ et ainsi*

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\big(\tfrac{k}{n}\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx$$



Exemple 3.2. *Calculer la limite de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.*

On a $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, $S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \ldots$

La somme S_n *s'écrit aussi* $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. *En posant* $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$ *et* $b = 1$, *on reconnaît que* S_n *est une somme de Riemann. Donc*

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \big[\ln|1+x|\big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Ainsi $S_n \to \ln 2$ *(lorsque* $n \to +\infty$*).*

4 Primitives et intégrales d'une fonction continue

4.1 Relation primitive-intégrale

Théorème 4.1 (Le théorème fondamental de l'analyse)**.**
Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *une fonction continue. La fonction* $F : I \to \mathbf{R}$ *définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

est une primitive de f*, c'est-à-dire* F *est dérivable et* $F'(x) = f(x)$.
Par conséquent pour une primitive F *quelconque de* f *:*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Notation. On note $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarques.

1. *Toute fonction continue sur un intervalle* I *admet des primitives sur* I.
2. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *est même* ***l'unique primitive de*** f ***qui s'annule en*** a.
3. *En particulier si* F *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *alors* $\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)$.
4. *On évitera la notation* $\int_a^x f(x)\,dx$ *où la variable* x *est présente à la fois aux bornes et à l'intérieur de l'intégrale. Mieux vaut utiliser la notation* $\int_a^x f(t)\,dt$ *ou* $\int_a^x f(u)\,du$ *pour éviter toute confusion.*

4.2 Rappels sur les techniques d'intégration

Théorème 4.2 (Intégration par parties)**.**
Soient u *et* v *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un segment* $[a, b]$. *On a :*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque. La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = [uv] - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Théorème 4.3 (Changement de variable)**.**
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $a, b \in J$:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si F est une primitive de f alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $\big(f \circ \varphi\big) \cdot \varphi'$.

Exemple 4.1.

Calculer : $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x$ *et* $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

4.3 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 4.4 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.**
Soient $n \in \mathbf{N}$, f une fonction à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, et $a \in I$. Pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

— *Le polynôme :*

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f(a) + (X-a)f'(a) + \cdot + \frac{(X-a)^n}{n!} f^{(k)}(a)$$

est appelé ***polynôme de Taylor*** *de f de degré n.*

— *La fonction définie sur I par :*

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelée ***reste intégral d'ordre*** *n.*

Remarque. Cette égalité est appelée **Formule de Taylor avec reste intégral** à l'ordre n. Pour $a = 0$, l'égalité devient :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples 4.2.

1. $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$
2. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+2}}\,\mathrm{d}t.$
3. $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \sin\big(t + (n+1)\tfrac{\pi}{2}\big)\,\mathrm{d}t.$

4. $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} \cos\left(t + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}t.$

5 Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes

5.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition 5.1 (Généralisation aux fonctions complexes)**.**
Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ continue sur un segment $[a,b]$. On définit l'intégrale de f sur le segment $[a,b]$ par :

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i} \int_a^b \mathrm{Im}(f).$$

Remarque. On est donc ramené pour le cas des fonctions à valeurs complexes à l'étude des intégrales de fonctions réelles.

5.2 Propriétés

Théorème 5.1 (Propriétés de l'intégrale d'une fonction complexe continue sur un segment)**.**
Soient $f, g : [a,b] \mapsto \mathbf{C}$ deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$. On a :

(*i*) ***Linéarité :*** $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad \displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$

(*ii*) ***Relation de Chasles :*** $\forall c \in [a,b], \quad \displaystyle\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{[a,b]} f$

(*iii*) ***Inégalité et modules :*** $\displaystyle\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$

Attention

Les propriétés de positivité et de croissance ne sont pas valables dans le cas des fonctions complexes. De même :

$$\int_a^b f = 0 \text{ n'entraîne pas que } f = 0 \text{ sur } [a,b].$$