

TD 4 : Inégalités dans $\mathbb{R}$ - Généralités sur les fonctions

Exercice 1 Équations, inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- | | | | |
|--|--------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| 1/ $\left \frac{x+1}{1-x} \right = 3 - 2x$; | 3/ $ 1-x \leq 3-2x $; | 5/ $ x^2 - 3x + 2 = x $; | 7/ $ x^2 - 6x + 4 \geq 1$; |
| 2/ $ x+1 \leq 2-x$; | 4/ $\sqrt{x+8} = x+2$; | 6/ $x + \sqrt{x} = \frac{2}{x}$; | 8/ $\sqrt{x^2-1} \geq 2-x$. |

Solution:

- | | |
|---|---|
| 1/ $S = \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}$ | 5/ $S = \{-\sqrt{2}+2, \sqrt{2}+2\}$ |
| 2/ $S =]-\infty, \frac{1}{2}]$ | 6/ $S = \{1\}$ |
| 3/ $S =]-\infty, \frac{4}{3}] \cup [2, +\infty[$ | 7/ $S =]-\infty, 3-\sqrt{6}] \cup [1, 5] \cup [3+\sqrt{6}, +\infty[$ |
| 4/ $S = \{1\}$ | 8/ $S = [\frac{5}{4}, +\infty[$ |

Exercice 2 Inégalité dans $\mathbb{R}$

Soient $x, y \geq 0$.

- 1/ Montrer que $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
- 2/ En déduire que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$.

Solution:

1/ On a $\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0$ d'où $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 \geq x+y$ et comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $|\sqrt{x} + \sqrt{y}| \geq \sqrt{x+y}$ ou encore $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ car $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont positifs.

2/ Les variables x et y jouent un rôle symétrique dans l'inégalité à démontrer, on peut donc supposer que $x \geq y$. L'inégalité à démontrer devient donc $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$.

En remplaçant dans l'inégalité de la question 1), x par $x-y \geq 0$, il vient $\sqrt{x} = \sqrt{(x-y) + y} \leq \sqrt{x-y} + \sqrt{y}$, d'où le résultat demandé : $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$

Exercice 3 Comparaison

- 1/ Quelle est la valeur minimale de $f(x) = x^2 + x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$ puis pour $x \in [1, +\infty[$.
- 2/ Résoudre $\sqrt{x} \leq x$ sur $\mathbb{R}_+$.
- 3/ En déduire que pour $x \geq 1$, $\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + x + 1} \leq \frac{8}{3}x$.

Solution:

1/ La valeur minimale de f est atteinte pour le réel qui annule sa dérivée :

$$f'(x) = 0 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

La valeur minimale est $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

2/ $\forall x \geq 0, \sqrt{x} \leq x \iff x \leq x^2 \iff x(1-x) \leq 0 \iff x \geq 1$.

3/ On en déduit que pour tout $x \geq 1$, $\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + x + 1} \leq \frac{2x}{x^2 + x + 1} \leq \frac{2x}{3/4} = \frac{8}{3}x$

Exercice 4 Fonction bornée

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2 \sin x}{1 + x^2}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Solution:

Pour tout réel x , $|f(x)| \leq 2$.

Exercice 5 Comparaison

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 3}{(x-2)^2}$.

1/ Trouver un réel positif A tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) \geq x$.

2/ Trouver un réel négatif B tel que pour tout $x \leq B$, $f(x) \leq \frac{3}{4}x$.

Solution:

1/ On a $f(x) \geq x \iff f(x) - x \geq 0 \iff \frac{x^2 - x - 3}{(x-2)^2} \geq 0 \iff x \in]-\infty, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, +\infty[$.

On peut choisir par exemple $A = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ (ou égal à tout réel supérieur à $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$).

2/ $f(x) \leq \frac{3x}{4} \iff \frac{x^3 - 12}{4(x-2)^2} \leq 0 \iff x \leq \sqrt[3]{12}$. Tout réel négatif convient pour B .

Exercice 6 Inégalité dans $\mathbb{R}$

1/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $\frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - 2)}{\sqrt{x} + 2}$

2/ En déduire que pour tout $x \in [0, 2] \setminus \{1\}$, $\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2} \right| \leq 2$.

Solution:

1/ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, on a $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ et $x + \sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)$. D'autre part, on peut écrire $x - 1 = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$ et par suite $\frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)(x - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - 2)}{\sqrt{x} + 2}$.

2/ Pour tout réel $x \in [0, 2] \setminus \{1\}$, on a $\left| \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} \right| \leq 1$ et $|x - 2| \leq 2$ ce qui nous permet de conclure que :

$$\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2} \right| = \left| \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - 2)}{\sqrt{x} + 2} \right| \leq 2.$$

Exercice 7 transformations affines

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer son ensemble de définition et tracer une esquisse de sa représentation graphique à partir de ceux d'une fonction bien connue et de transformations affines sur les images et les antécédents.

1/ $f : x \mapsto (x - 2)^2 + 3$

2/ $f : x \mapsto \sqrt{1 - x}$

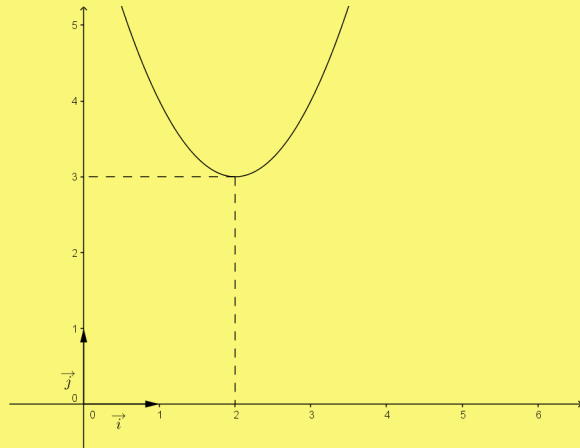
3/ $f : x \mapsto -2 - x^3$

4/ $f : x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

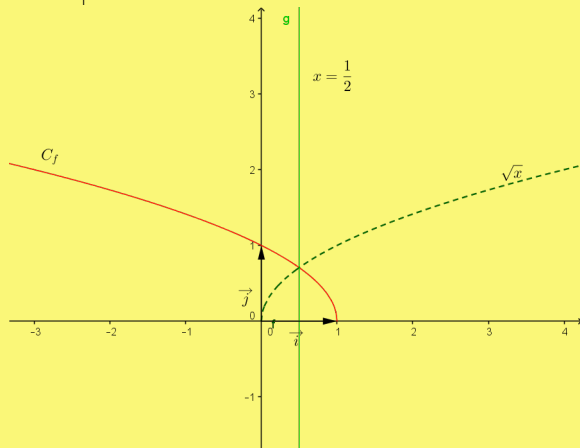
Solution:

1/ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. $x \mapsto x^2 \mapsto (x - 2)^2 \mapsto (x - 2)^2 + 3$.

En partant de la courbe de $x \mapsto x^2$, on applique une translation de vecteur $2\vec{i}$, suivie d'une translation de vecteur $3\vec{j}$.

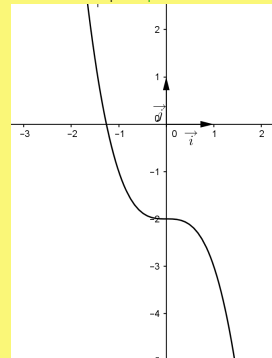


2/ $\mathcal{D}_f =]-\infty, 1]$. $x \mapsto \sqrt{x} \mapsto \sqrt{1 - x}$. En partant de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$, on applique une symétrie d'axe d'équation $x = 1/2$.



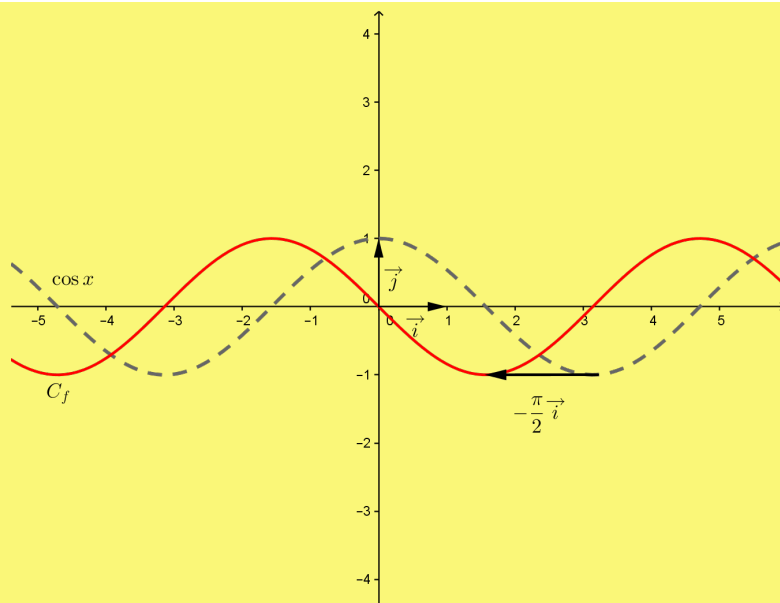
3/ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$x \mapsto x^3 \mapsto -x^3 \mapsto -x^3 - 2$. En partant de la courbe de $x \mapsto x^3$, on applique une symétrie d'axe (Ox) , suivie d'une translation de vecteur $-2\vec{j}$.



4/ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$x \mapsto \cos x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. En partant de la courbe de $x \mapsto \cos x$, on applique une translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$.



Exercice 8 Résolution graphique

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -x^2 + 4x - 3$.

1/ Mettre f sous forme canonique, puis déduire le tracé du graphe de la fonction f à partir de celui de la fonction $x \mapsto x^2$.

2/ Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de λ , le nombre des solutions de l'équation $f(x) = \lambda$. Retrouver le résultat algébriquement.

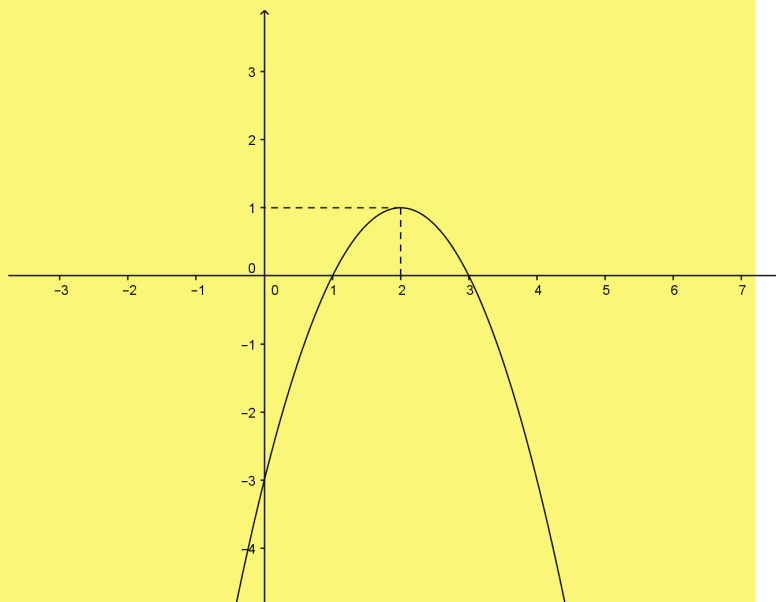
3/ Déterminer graphiquement, l'ensemble des solutions de $-1 \leq f(x) \leq 0$. Retrouver le résultat algébriquement.

Solution:

1/ $-x^2 + 4x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$.

$x \mapsto x^2 \mapsto (x - 2)^2 \mapsto -(x - 2)^2 \mapsto -(x - 2)^2 + 1$.

En partant de la parabole d'équation $y = x^2$, on applique une translation de vecteur $2\vec{i}$, suivie d'une symétrie d'axe (Ox) enfin une translation de vecteur $\vec{j}$.



2/ Les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec la droite horizontale d'équation $y = \lambda$.

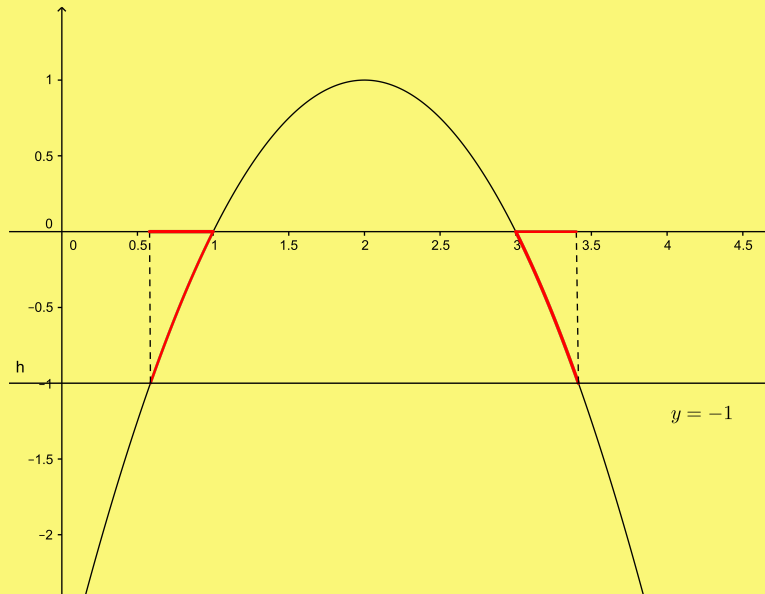
- Si $\lambda > 1$, l'équation $f(x) = \lambda$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

- Si $\lambda = 1$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $\lambda < 1$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

Méthode algébrique :

On a $f(x) = \lambda$ si, et seulement si $(x - 2)^2 = 1 - \lambda$, d'où la discussion trouvée par la méthode graphique.

3/ Les solutions sont les abscisses des points de la courbe de f situés entre les droites horizontales d'équations $y = 0$ et $y = -1$.



Méthode algébrique :

$$-1 \leq -(x - 2)^2 + 1 \leq 0 \iff 1 \leq (x - 2)^2 \leq 2 \iff 1 \leq |x - 2| \leq \sqrt{2}.$$

- Si $x \geq 2$:

$$1 \leq |x - 2| \leq \sqrt{2} \iff 1 \leq x - 2 \leq \sqrt{2} \iff 3 \leq x \leq 2 + \sqrt{2}.$$

- Si $x \leq 2$:

$$1 \leq |x - 2| \leq \sqrt{2} \iff 1 \leq -(x - 2) \leq \sqrt{2} \iff 2 - \sqrt{2} \leq x \leq 1.$$

Au final, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [2 - \sqrt{2}, 1] \cup [3, 2 + \sqrt{2}]$.

Exercice 9 Domaine de définition

Chercher le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} 1/ f_1 : x &\mapsto \sqrt{\frac{3+x}{3-2x}} \\ 2/ f_2 : x &\mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2} \end{aligned}$$

$$3/ f_3 : x \mapsto \ln |1 - x|$$

$$4/ f_4 : x \mapsto \ln (|2x - 4| - 3|x + 1|)$$

Solution:

$$1/ \mathcal{D}_{f_1} = [-3, \frac{3}{2}[\quad 2/ \mathcal{D}_{f_2} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[\quad 3/ \mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad 4/ \mathcal{D}_{f_4} =]-7, \frac{1}{5}[$$

Exercice 10 Périodicité

Étudier la périodicité des fonctions suivantes :

1/ $f_1 : x \mapsto \cos(3x)$

3/ $f_3 : x \mapsto \cos(x) + 3$

5/ $f_5 : x \mapsto \sin^2(x)$

2/ $f_2 : x \mapsto \cos x + \sin x$

4/ $f_4 : x \mapsto \cos(x + 3)$

6/ $f_6 : x \mapsto \sin(x^3)$

Solution:

1/ $\frac{2\pi}{3}$

3/ 2π

5/ π

2/ 2π

4/ 2π

6/ La fonction n'est pas périodique.

Exercice 11 Parité

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que f et g soient paires ou impaires (on a 4 cas de figures).

Que peut-on dire sur la parité de $f \times g$ et de $f \circ g$?

Solution:

- Si f et g sont paires, alors $f \times g$ et $f \circ g$ sont aussi paires.

- Si f et g sont impaires, alors $f \times g$ est paire et $f \circ g$ est impaire.

Preuve pour $f \circ g$: On a $f \circ g(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)] = -f[g(x)] = f \circ g(x)$.

- Si f est paire et g est impaire, alors $f \times g$ est impaire et $f \circ g$ est paire.

Preuve pour $f \circ g$: On a $f \circ g(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)] = f[g(x)] = f \circ g(x)$.

Preuve pour $f \times g$: On a $(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = f(x) \times (-g(x)) = -(f \times g)(x)$.

- Si f est impaire et g est paire, alors $f \times g$ est impaire et $f \circ g$ est paire.

Preuve pour $f \circ g$: On a $f \circ g(-x) = f[g(-x)] = f[g(x)] = f \circ g(x)$.

Preuve pour $f \times g$: On a $(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = -f(x) \times g(x) = -(f \times g)(x)$.

Exercice 12 Parité

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2}$ est une fonction paire.

Solution:

Pour tout réel x non nul, $f(x) = \frac{x e^x + x - 2 e^x + 2}{2(e^x - 1)}$, d'où .

$$f(-x) = \frac{-x e^{-x} - x - 2 e^{-x} + 2}{2(e^{-x} - 1)} = \frac{-x - x e^x - 2 + 2 e^x}{2(1 - e^x)} = \frac{(-1)}{(-1)} f(x).$$

Exercice 13 Injection, surjection, bijection

Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1} \end{cases}$.

- 1/ f est-elle injective? surjective?
- 2/ Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1/2, 1/2]$.
- 3/ Déterminer $f^{-1}([0, 1/2])$.
- 4/ Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \rightarrow [-1/2, 1/2]$, $g(x) = f(x)$ est une bijection.
- 5/ Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f .

Solution:

5/

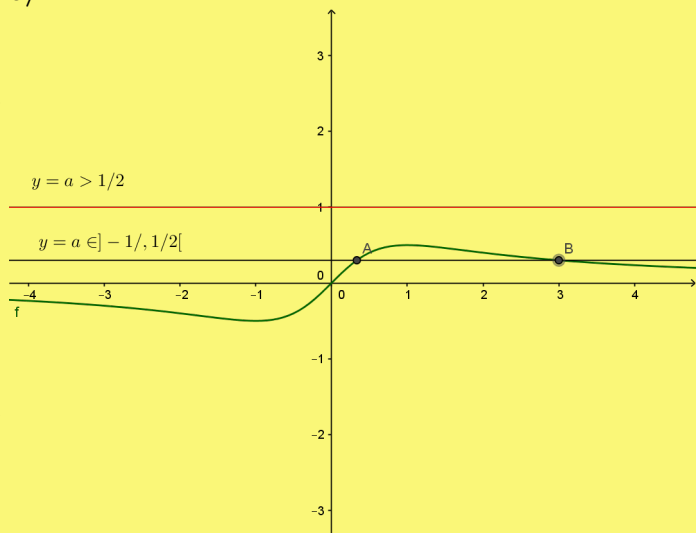
1/ f est non injective car pour $x = \frac{1}{2}$ et $x' = 2$, on

a $x \neq x'$ mais $f(x) = f(x') = \frac{2}{5}$ et non surjective car pour $y = 1$, il n'existe pas de réel x tel que $f(x) = 1$.

2/ Á l'aide d'une double inclusion, on prouve que $f(\mathbb{R}) = [-1/2, 1/2]$.

3/ $f^{-1}([0, 1/2]) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [0, 1/2]\} = [0, 1]$.

4/ g est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$, donc elle réalise une bijection de $[-1, 1]$ vers $f([-1, 1]) = [-1/2, 1/2]$.



Exercice 14 Bijection, fonction réciproque

Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{cases}$.

- 1/ Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur une partie J de $\mathbb{R}$ à préciser.
- 2/ Expliciter f^{-1} .

Solution:

1/ On vérifie que f est impaire, on peut donc étudier ses variations sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$, f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et par suite, par imparité, f est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = J =]-1, 1[$.

2/ Détermination de f^{-1} :

$$\begin{cases} y = \frac{x}{1+x} \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{y}{1-y} = \frac{y}{1-|y|} \\ y \in [0, 1] \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y = \frac{x}{1-x} \\ x \in \mathbb{R}_- \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{y}{1+y} = \frac{y}{1-|y|} \\ y \in [-1, 0] \end{cases}$$

Donc : $f^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}, f^{-1} : x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$.

