Table des matières

Chapitre 15

Géométrie du plan

1 Repérage dans le plan

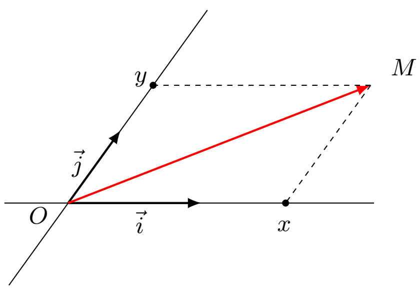
1.1 Repère cartésien

Définition 1.1 (Colinéarité)**.**
Deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont* ***colinéaires*** *s'il existe* $k \in \mathbf{R}$ *tel que* $\vec{v} = k\vec{u}$ *ou* $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque. Un vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.

Définition 1.2 (Repère cartésien)**.**
On appelle ***repère cartésien*** *du plan tout triplet* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *où* O *est un point quelconque du plan et* $(\vec{i}, \vec{j})$ *sont deux vecteurs non colinéaires du plan. On dit que* $(\vec{i}, \vec{j})$ *est une* ***base*** *du plan vectoriel.*

Théorème 1.1 (Existence et unicité des coordonnées)**.**
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *un repère cartésien du plan.*
Pour tout vecteur $\vec{u}$ *du plan il existe un unique couple de réels* (x, y)*, appelé* ***coordonnées cartésiennes*** *de* $\vec{u}$*, tel que* $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$*. On note souvent* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Pour tout point M *du plan, les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *sont appelées* ***coordonnées cartésiennes*** *de* M.



Remarque. Une base d'un plan permet de déterminer d'une manière unique les coordonnées des vecteurs du plan alors qu'un repère permet de déterminer d'une manière unique les coordonnées des points du plan.

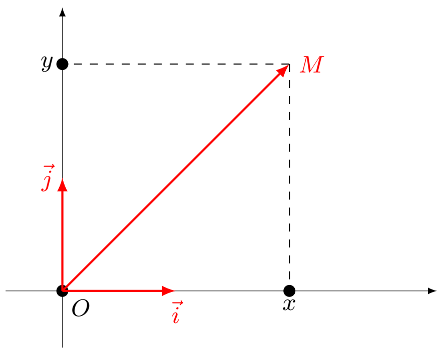
Définition 1.3.
On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ *est :*

(*i*) *une* ***base orthogonale*** *du plan lorsque* $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ *;*

(*ii*) *une* ***base orthonormée*** *du plan lorsque* $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ *et* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ *;*

(*iii*) *une* ***base orthonormée directe*** *du plan lorsque* $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \frac{\pi}{2}$ *et* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.

Définition 1.4 (Repère orthonormé direct)**.**
On appelle ***repère orthonormé direct*** *du plan tout repère* $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *où* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ *avec* $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \frac{\pi}{2}$.



On se placera pour la suite dans un repère orthonormal direct du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **et on identifiera le plan à** $\mathbf{R}^2$**.**

1.2 Coordonnées polaires

Définition 1.5 (Repère polaire, coordonnées polaires)**.**

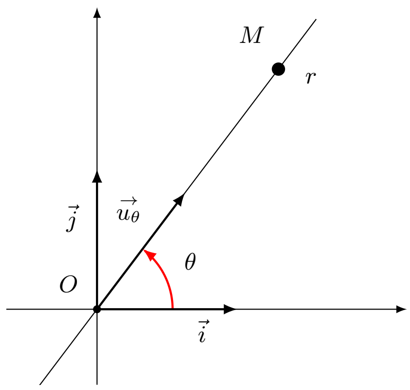
(*i*) *Pour* $\theta \in \mathbf{R}$, *on pose :*

$$\vec{u_\theta} = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j}$$
$$\vec{v_\theta} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$$

Le triplet $(O; \vec{u_\theta}, \vec{v_\theta})$ *est un repère du plan, appelé* ***repère polaire*** *d'angle* θ.

(*ii*) *On appelle coordonnées polaires d'un point* M *du plan tout couple de réels* (r, θ) *tel que :*

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u_\theta} = r\left(\cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j}\right)$$



Remarque. Les coordonnées polaires d'un point donné ne sont pas uniques. Par exemple, (r, θ), $(r, \theta + 2\pi)$ et $(-r, \theta + \pi)$ sont les coordonnées polaires d'un même point.

Proposition 1.1 (Lien entre coordonnnées cartésiennes et coordonnées polaires)**.**
Soit un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires (r, θ). On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos(\theta) \\ y &= r\,\sin(\theta) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

2 Produit scalaire

2.1 Définitions

Définition 2.1 (Définition géométrique du produit scalaire)**.**
*Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on définit le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :*

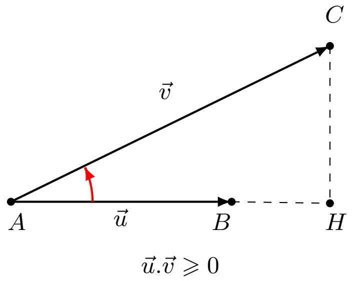
$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos(\vec{u}, \vec{v}) & \textit{si } \vec{u} \textit{ et } \vec{v} \textit{ non nuls} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

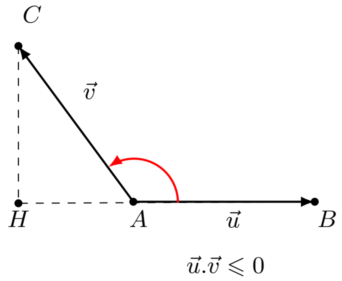
Remarques.

— *En particulier :* $\vec{u}\,.\,\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
— *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$ on dit que le produit scalaire est **symétrique**.*

Proposition 2.1 (Interprétation du produit scalaire)**.**
Soient A, B et C trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Si H est le projeté orthogonal de C sur l'axe orienté $(A; \vec{u})$. On a :

$$\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC\,\cos(\vec{u}, \vec{v}) = AB \times \overline{AH}.$$





2.2 Propriétés

Proposition 2.2 (Produit scalaire et orthogonalité)**.**

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \,.\, \vec{v} = 0$$

Remarque. Trois points A, B, C deux à deux distincts forment un triangle rectangle en A si, et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Proposition 2.3 (Symétrie et bilinéarité)**.**

1. *Symétrie :*
$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = \vec{v} \,.\, \vec{u}$$
2. *Linéarité par rapport à chaque variable.*
$$\vec{u} \,.(\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2}) = \lambda_1 \times \vec{u} \,.\, \vec{v_1} + \lambda_2 \times \vec{u} \,.\, \vec{v_2}$$
$$(\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2}).\, \vec{u} = \lambda_1 \times \vec{v_1} \,.\, \vec{u} + \lambda_2 \times \vec{v_2} \,.\, \vec{u}$$

Proposition 2.4 (Identités remarquables)**.**
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a :

(i) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\, \vec{u} \,.\, \vec{v}$ *;*
(ii) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\, \vec{u} \,.\, \vec{v}$ *;*
(iii) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$ *(*identité du parallélogramme*) ;*
(iv) $\vec{u} \,.\, \vec{v} = \dfrac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ *(*identité de polarisation*).*

Remarque (Identité d'Al Kashi).
Dans un triangle ABC, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

Proposition 2.5 (Expression dans une base orthonormée)**.**
Soient $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base orthonormée du plan et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans cette base. Alors :

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = xx' + yy'.$$

Proposition 2.6 (Inégalités)**.**

1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|\vec{u}\,.\,\vec{v}\,| \leqslant \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$

On a l'égalité si et seulement si les vecteurs sont colinéaires.

2. *Inégalité triangulaire :*

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$$

On a l'égalité si et seulement si les vecteurs sont colinéaires et de même sens.

Proposition 2.7 (Distance dans une base orthonormale)**.**
Si A et B sont deux points de coordonnées $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ dans un r.o.n.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

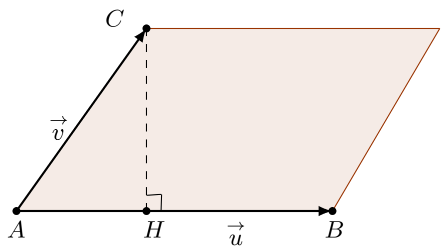
3 Produit mixte

3.1 Généralités

Définition 3.1 (Produit mixte ou déterminant)**.**
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
*On définit le **produit mixte** (ou **déterminant**) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :*

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = [\vec{u},\vec{v}] = \begin{cases} \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\sin(\vec{u},\vec{v}) & \textit{si } \vec{u} \textit{ et } \vec{v} \textit{ sont non nuls} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 3.1 (Interprétation géométrique du produit mixte)**.**
Soient A, B et C trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On note H le projeté orthogonal de C sur l'axe orienté $(A; \overrightarrow{AB})$.
Alors $[\vec{u},\vec{v}]$ représente l'aire algébrique d'un parallélogramme dont les côtés sont construits avec les deux vecteurs et $\left|[\vec{u},\vec{v}]\right|$ représente donc l'aire du parallélogramme.



Proposition 3.2 (Produit mixte et colinéarité).

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = \left[\vec{u}, \vec{v}\right] = 0$$

Remarque. Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

Proposition 3.3 (Antisymétrie).
Si on échange les deux vecteurs dans un produit mixte, ce dernier change de signe :

$$\left[\vec{v}, \vec{u}\right] = -[\vec{u}, \vec{v}]$$

3.2 Propriétés

Proposition 3.4 (Bilinéarité).
Le produit mixte est linéaire par rapport aux deux vecteurs :

$$\begin{aligned} \left[\lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2}, \vec{v}\right] &= \lambda_1 \left[\vec{u_1}, \vec{v}\right] + \lambda_2 \left[\vec{u_2}, \vec{v}\right] \\ \left[\vec{u}, \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2}\right] &= \lambda_1 \left[u, \vec{v_1}\right] + \lambda_2 \left[u, \vec{v_2}\right]. \end{aligned}$$

Proposition 3.5 (Expression dans une base orthonormée directe).
Soient $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ *une base orthonormée directe du plan et* $\vec{u}, \vec{v}$ *deux vecteurs de coordonnées respectives* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *dans cette base. Alors :*

$$\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

Remarque (Loi des sinus).

Dans un triangle ABC, on a : $\dfrac{\sin \widehat{ABC}}{AC} = \dfrac{\sin \widehat{BAC}}{BC} = \dfrac{\sin \widehat{ACB}}{AB}$.

4 Droites

4.1 Représentations

Proposition 4.1 (Caractérisation d'une droite).
Une droite $\mathcal{D}$ est déterminée :

(i) *Soit par la donnée de deux points distincts A et B. La droite $\mathcal{D}$ est donc l'ensemble des points M tels que les points A, M, B soient alignés :*

$$M \in \mathcal{D} \iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

(ii) *Soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$. La droite $\mathcal{D}$ est donc l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires au vecteur $\vec{u}$:*

$$M \in \mathcal{D} \iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0.$$

On note $\mathcal{D} = A + \mathbf{R}\,\vec{u}$.

(iii) *Soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur orthogonal $\vec{n} \neq \vec{0}$. La droite $\mathcal{D}$ est donc l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ soient orthogonaux au vecteur $\vec{n}$:*

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0.$$

Proposition 4.2 (Équation cartésienne d'une droite dans le plan).

(i) *Toute droite du plan admet une équation cartésienne du type :*

$$ax + by + c = 0 \text{ où } a, b, c \in \mathbf{R} \text{ avec } (a, b) \neq (0, 0)$$

(ii) *Réciproquement, toute équation du type $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ définit une droite.*

Proposition 4.3 (Vecteur directeur et vecteur normal).
*La droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ admet le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ pour **vecteur directeur** et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour **vecteur normal**.*

Proposition 4.4 (Équation cartésienne et parallélisme, perpendicularité).
Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation $a'x + b'y + c' = 0$ avec $(a', b') \neq (0, 0)$.
Notons leurs vecteurs normaux respectifs $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$

(i) $\mathcal{D} // \mathcal{D}' \iff \det(\vec{n}, \vec{n'}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = 0.$

(C.à.d. les vecteurs normaux sont colinéaires.)

(ii) $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \iff \vec{n}.\vec{n'} = aa' + bb' = 0.$

(C.à.d. les vecteurs normaux sont orthogonaux.)

Remarque. Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes si, et seulement si $ab' - ba' \neq 0$. Dans ce cas, les coordonnées de leur point d'intersection sont solutions du système de Cramer $\begin{cases} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{cases}$.

Proposition 4.5 (Paramétrage d'une droite).
La droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(x_A, y_A)$ et dirigé par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$.

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = x_A + tx_u \\ x = y_A + ty_u \end{cases}, t \in \mathbf{R} \iff M = A + t\vec{u} \text{ où } t \in \mathbf{R} \iff \mathcal{D} = A + \mathbf{R}\vec{u}.$$

4.2 Distance d'un point à une droite

Définition 4.1 (Distance d'un point à une droite).
La distance du point M_0 à une droite $\mathcal{D}$ est la distance entre le point M_0 et son projeté orthogonal H sur la droite $\mathcal{D}$.

Proposition 4.6 (Expression de la distance d'un point à une droite).
Soient $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et $\mathcal{D}$ une droite passant par le point A, de vecteur directeur $\vec{u}$, de vecteur normal $\vec{n}$ et d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point quelconque du plan.
La distance du point M_0 à la droite $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|\det(\overrightarrow{AM_0}, \vec{u})|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|\overrightarrow{AM_0}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

5 Cercles

5.1 Généralités

Définition 5.1 (Cercle).
Soit Ω un point du plan et R un réel strictement positif. On appelle ***cercle*** *de centre Ω et de rayon R, l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$.*

Proposition 5.1 (Équation cartésienne d'un cercle).
Tout cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon $R \geqslant 0$ admet pour équation :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2.$$

Proposition 5.2 (Représentation paramétrique d'un cercle).
Tout cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon $R \geqslant 0$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= x_\Omega + R\cos(t) \\ y &= y_\Omega + R\sin(t) \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

Proposition 5.3 (Caractérisation d'un cercle avec son diamètre).
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$.

$$M \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$

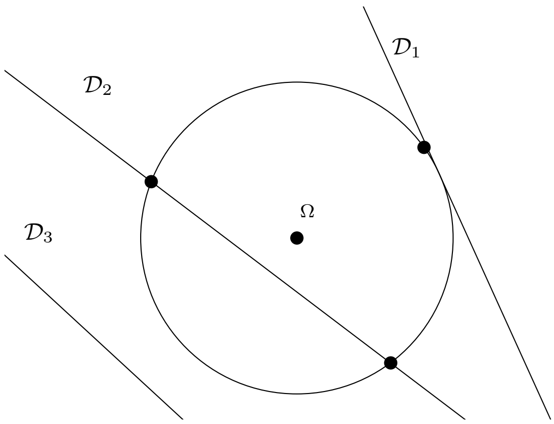
5.2 Droites et cercle

Proposition 5.4 (Positions relatives d'une droite par rapport à un cercle).
Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R, et $\mathcal{D}$ une droite du plan.

(i) *Si $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$, alors $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ en un seul point M, on dit que $\mathcal{D}$ est* ***tangente*** *à $\mathcal{C}$ en M ;*

(ii) *Si $d(\Omega, \mathcal{D}) < R$, alors $\mathcal{D}$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts ;*

(iii) *Si $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$, alors $\mathcal{D}$ ne coupe pas $\mathcal{C}$.*

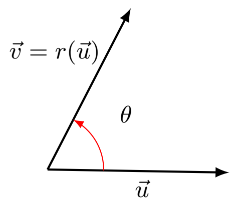


6 Transformations vectorielles du plan

6.1 Rotations vectorielles

Définition 6.1 (Rotation).
Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On appelle ***rotation vectorielle*** *d'angle θ, l'application r du plan qui à un vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $\vec{v} = r(\vec{u})$ qui vérifie :*

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \theta \, (2\pi).$$



Proposition 6.1 (Matrice de rotation).
Soit r la rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbf{R}$. Si un vecteur $\vec{u}$ est de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'image de $\vec{u}$ par r est le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ vérifiant :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \textit{avec } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

*R_θ s'appelle **matrice de la rotation** r.*

Exemple 6.1. *La matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'image d'un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ par cette rotation est le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ forment une base orthogonale directe.*

Proposition 6.2 (Isométrie).
Toute rotation vectorielle r conserve :
- *(i) les normes, c'est-à-dire $\|\vec{u}\| = \|r(\vec{u})\|$;*
- *(ii) les mesures d'angles, c'est-à-dire $(\vec{u}, \vec{v}) = (r(\vec{u}), r(\vec{v}))$.*

*On dit que la rotation est une **isométrie**.*

Remarque.

Les rotations conservent l'orthogonalité, c'est-à-dire $\vec{u} \perp \vec{v} \implies r(\vec{u}) \perp r(\vec{v})$. Les rotations conservent aussi la colinéarité, c'est-à-dire $\vec{u} \,//\, \vec{v} \implies r(\vec{u})//r(\vec{v})$.
En particulier, l'image par une rotation vectorielle d'un cercle est un cercle de même rayon et l'image d'une droite est une droite.

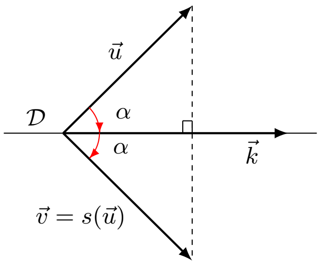
Proposition 6.3 (Opérations sur les rotations).
Pour tous $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$, on a :

$$R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}, \; R_\theta \textit{ est inversible et } R_\theta^{-1} = R_{-\theta}.$$

6.2 Symétries vectorielles

Définition 6.2 (Symétrie).
*Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{k}$. On appelle **symétrie vectorielle** d'axe $\mathcal{D}$, l'application s du plan qui à un vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $\vec{v} = s(\vec{u})$ qui vérifie :*

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \quad \textit{et} \quad (\vec{u}, \vec{k}) = (\vec{k}, \vec{v})\,(2\pi).$$



Proposition 6.4 (Matrice d'une symétrie)**.**
Soit s la symétrie vectorielle d'axe $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{k}$ tel que $(\vec{i}, \vec{k}) = \theta$.
Si un vecteur $\vec{u}$ est de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'image de $\vec{u}$ par s est le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ vérifiant :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_\theta \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{avec } S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

*S_θ s'appelle **matrice de la symétrie** s.*

Exemple 6.2. *L'image du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ par la symétrie d'axe (Ox) est le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$. La matrice de rotation associée à s est $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Proposition 6.5 (Isométrie)**.**
Toute symétrie vectorielle s conserve :

(i) les normes, c'est-à-dire $\|\vec{u}\| = \|s(\vec{u})\|$;

(ii) les mesures d'angles (non orientés), c'est-à-dire $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(s(\vec{u}), s(\vec{v}))}$.

*On dit que la symétrie vectorielle est une **isométrie**.*

Remarque.
Les symétries vectorielles conservent l'orthogonalité, c'est-à-dire $\vec{u} \perp \vec{v} \implies s(\vec{u}) \perp s(\vec{v})$.
Les symétries conservent aussi la colinéarité, c'est-à-dire $\vec{u} \,//\, \vec{v} \implies s(\vec{u})//s(\vec{v})$.
En particulier, l'image par une symétrie vectorielle d'un cercle est un cercle de même rayon et l'image d'une droite est une droite parallèle.

Proposition 6.6 (Opérations sur les symétries)**.**
Pour tous $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$, on a :

$$S_\theta \times S_{\theta'} = R_{2(\theta-\theta')}, \; S_\theta \text{ est inversible et } S_\theta^{-1} = S_\theta.$$