TD 17 : Géométrie de l'espace

Dans tous les exercices, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$.

Exercice 1

1/ Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$.

a) Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $||\overrightarrow{u}||$, $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}$ et $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$.

b) Déterminer l'image de $\overrightarrow{u}$ par la rotation vectorielle d'axe $(O;\overrightarrow{j})$ et d'angle $\pi/3$.

c) Déterminer l'image de $\overrightarrow{u}$ puis de $\overrightarrow{v}$ par la symétrie vectorielle par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x+y-z=0$.

2/ Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\alpha\\\alpha+1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\beta\\\beta-2\\-1\end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

b) Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

3/ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs normés et orthogonaux.

On pose $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{b}=4\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.

Calculer $\|\overrightarrow{a}\|^2$, $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}$ et $[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{u}]$

Exercice 2

Soient $A(1,1,0), B(2,0,-1), C(1,2,3), D(-1,4,2)$.

Les points A,B,C,D sont-ils coplanaires ? Déterminer l'intersection des plans (OAB) et (OCD).

Exercice 3

On considère la famille de plans $(P_m)_{m\in\mathbf{R}}$ définis par les équations cartésiennes : $m^2x+(2m-1)y+mz=3$.

1/ Déterminer les plans P_m dans chacun des cas suivants :

a) $A(1;1;1)\in P_m$.

b) $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-5/2\\-1\end{pmatrix}$ est normal à P_m.

c) $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}//P_m$.

2/ Démontrer qu'il existe un unique point M appartenant à tous les plans P_m.

Exercice 4

1/ Déterminer les coordonnées sphériques du point M de coordonnées cartésiennes $(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3})$.

2/ Déterminer les coordonnées cylindriques du point M de coordonnées cartésiennes $(-\frac{\sqrt{3}}{3},-1,-\frac{\sqrt{3}}{3})$.

Exercice 5

Soient $\mathcal{S} : (x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 9$, $\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x = 2+t-2s \\ y = 1-t-s \\ z = 3+2t+s \end{cases}$ $(s,t) \in \mathbf{R}^2$, $\mathcal{P}_2 : 2x+3y-4z+3 = 0$,

$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = 3-t \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$, $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x-y+z = 1 \\ x+y+2z = 3 \end{cases}$, et $A(-1,1,1)$.

1/ Déterminer la nature géométrique et les caractéristiques (*Centre et rayon pour une sphère. Point de passage, vecteur directeur pour une droite. Vecteurs directeurs, vecteur normal et point de passage pour un plan*) de $\mathcal{S}, \mathcal{P}_i$ et $\mathcal{D}_i$ pour $i = 1, 2$.

2/ Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$.

3/ Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{P}_2$.

4/ Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}_1$.

5/ Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_2$.

6/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

7/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{P}_1$.

8/ Déterminer la distance de A à $\mathcal{D}_2$.

Exercice 6

Soient $A(2,1,1), B(-1,2,0), C(1,4,-1)$ et $M(3,4,2)$.

1/ Calculer le volume du parallélépipède construit à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}$.

2/ Calculer par deux méthodes la distance de M à la droite (AB), puis former une équation de la perpendiculaire à (AB) passant par M.

3/ Déterminer un système d'équations de la perpendiculaire commune aux droites (AC) et (BM).

4/ Exprimer pour tout point $M(x,y,z)$ les coordonnées de son projeté orthogonal $M'(x',y',z')$ sur le plan (ABC). et de son symétrique $M''(x'',y'',z'')$ par rapport au plan (ABC).

5/ Exprimer pour tout point $M(x,y,z)$ les coordonnées de son projeté orthogonal $M'(x',y',z')$ sur la droite (AC). et de son symétrique $M''(x'',y'',z'')$ par rapport à la droite (AC).

Exercice 7

Déterminer la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ dans chacun des cas suivants :

1/ $\mathcal{D} : x = y = z$ et $M(1,2,3)$.

2/ $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 5-t \\ y = 2+3t \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$ et $M(-1,-3,2)$.

3/ $M(1,2,1)$ et $\mathcal{D}$ passant par $A(0,1,0)$ et $B(2,3,-1)$.

Exercice 8

Soient a un réel, $\mathcal{D} : \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 2y + az = 2 \end{cases}$ deux droites.

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient coplanaires, donner alors l'équation du plan les contenant.

Exercice 9

Soit $\mathcal{S}$ la sphère d'équation $x^2 + y^2 - x + 4y + z^2 - 2z - 2 = 0$.

1/ Déterminer le centre et le rayon de $\mathcal{S}$.

2/ Discuter selon le paramètre réel m la position du plan $\mathscr{P}_m$ d'équation $mx - 2y + z - 1 = 0$ par rapport à $\mathcal{S}$.

3/ Montrer que plan $\mathscr{P}_0$ coupe $\mathcal{S}$ en un cercle dont on précisera le rayon et les coordonnées du centre.

Exercice 10

On note $\mathcal{S}$ la sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite $O + \mathbf{R}\vec{k}$.

1/ Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$, et une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}$ en chacun de ses points.

2/ Déterminer l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y - z + 2 = 0$ en précisant les caractéristiques de cette intersection.

Exercice 11

Soient les droites $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$, et $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

1/ Vérifier que ces deux droites ne sont pas coplanaires.

2/ Déterminer la perpendiculaire commune au deux droites, puis préciser les coordonnées des points d'intersection de cette perpendiculaire commune avec les deux droites $\mathcal{D}_1$, et $\mathcal{D}_2$.

3/ Calculer par deux méthodes différentes la distance de $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{D}_2$.

Exercice 12

Soit un tétraèdre $ABCD$ tel que BAC est isocèle en B et DAC isocèle en D. On veut démontrer par deux méthodes que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

1/ Montrer, à l'aide de la relation de Chasles, que $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB})$, puis conclure.

2/ Montrer en utilisant un plan médian adéquat que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

Rappel : *On appelle plan médian d'un segment $[M_0M_1]$ le plan qui passe par le milieu de $[M_0M_1]$ et qui est perpendiculaire à (M_0M_1).*

Exercice 13

Soient les trois droites $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$, $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ et $\mathcal{D}_3 : \begin{cases} x + y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$.

Déterminer les droites qui sont coplanaires avec $\mathcal{D}_1$, avec $\mathcal{D}_2$, avec $\mathcal{D}_3$ et donner l'équation de l'ensemble des points de l'espace qui sont sur au moins une de ces droites.