Table des matières

Chapitre 17

Géométrie de l'espace

1 Repérage dans l'espace

1.1 Coordonnées cartésiennes

Définition 1.1 (Coplanarité).
Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits ***coplanaires*** *si l'un des vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres.*
Autrement dit, s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\vec{u} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \text{ ou } \vec{v} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{w} \text{ ou } \vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}.$$

On dit aussi que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ***liés****.*

Remarque. Un vecteur nul est coplanaire avec tout autre couple de vecteurs.

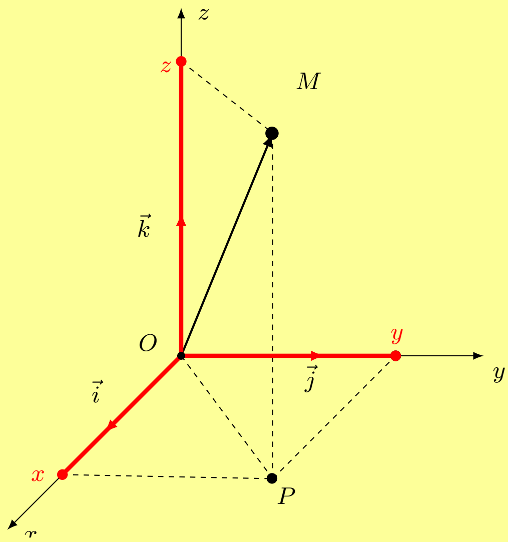
Définition 1.2 (Repère cartésien, base).
On appelle ***repère cartésien*** *du plan tout quadruplet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point quelconque de l'espace et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace. On dit que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une* ***base*** *de l'espace.*

Théorème 1.1 (Existence et unicité des coordonnées cartésiennes).

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels (x, y, z), appelé ***coordonnées cartésiennes*** *de $\overrightarrow{OM}$, tel que :*

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

On note souvent $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $M(x, y, z)$.



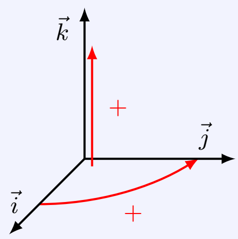
Remarque. Une base de l'espace permet de déterminer d'une manière unique les coordonnées des vecteurs de l'espace alors qu'un repère permet de déterminer d'une manière unique les coordonnées des points de l'espace.

Définition 1.3 (Coordonnées d'un point).
Si M est un point de l'espace de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

(i) x est appelé ***abscisse*** *de M dans le repère $\mathcal{R}$;*
(ii) y est appelé ***ordonnée*** *de M dans le repère $\mathcal{R}$;*
(iii) z est appelé ***cote*** *de M dans le repère $\mathcal{R}$.*

Définitions 1.1 (Base orthogonale, base orthonormée, base orthonormée directe).
On dit que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

(i) une ***base orthogonale*** *de l'espace lorsque les vecteurs sont deux à deux orthogonaux ;*
(ii) une ***base orthonormée*** *de l'espace lorsque les vecteurs sont deux à deux orthogonaux et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$;*
(iii) une ***base orthonormée directe*** *de l'espace lorsque $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base orthonormée et* ***directe*** *; autrement dit, les trois vecteurs vérifient l'une des règles équivalentes suivantes : « Règle du bonhomme d'Ampère », « règle des trois doigts de la main droite ».*



Définition 1.4 (Repère orthonormé direct)**.**
*On appelle **repère orthonormé direct** de l'espace tout repère* $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *où* O *est un point de l'espace et* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est une base orthonormée directe de l'espace.*

On se placera pour la suite dans un repère orthonormal direct de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **et on identifiera l'espace à** $\mathbf{R}^3$**.**

1.2 Coordonnées cylindriques - Coordonnées sphériques

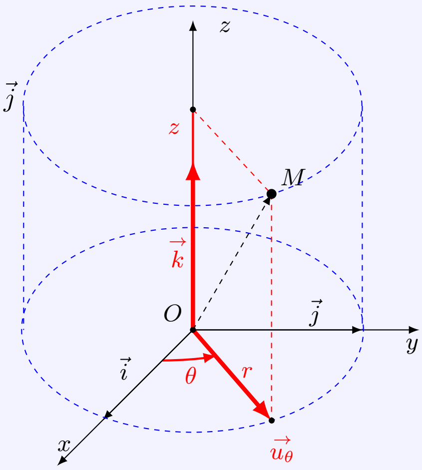
Définition 1.5 (Repère cylindrique, coordonnées cylindriques)**.**

(i) *Pour* $\theta \in \mathbf{R}$*, on pose :*

$$\vec{u_\theta} = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j}$$
$$\vec{v_\theta} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\,\vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\,\vec{j}$$

Le triplet $(O;\vec{u_\theta},\vec{v_\theta},\vec{k})$ *est un repère de l'espace, appelé **repère cylindrique**.*

(ii) *On appelle **coordonnées cylindriques** d'un point* M *de l'espace tout triplet de réels* (r,θ,z) *tel que :*



$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u_\theta} + z\,\vec{k} = r\left(\cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j}\right) + z\,\vec{k}\,.$$

Remarque. Si on choisit $r \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, les coordonnées cylindriques d'un point de l'espace sont uniques.

Proposition 1.1 (Lien entre coordonnnées cartésiennes et coordonnées cylindriques)**.**
Soit un point M *de coordonnées cartésiennes* (x,y,z) *et de coordonnées cylindriques* (r,θ,z)*, on a :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& r\cos\theta \\ y &=& r\sin\theta \\ z &=& z \end{array}\right. .$$

Exemple 1.1.

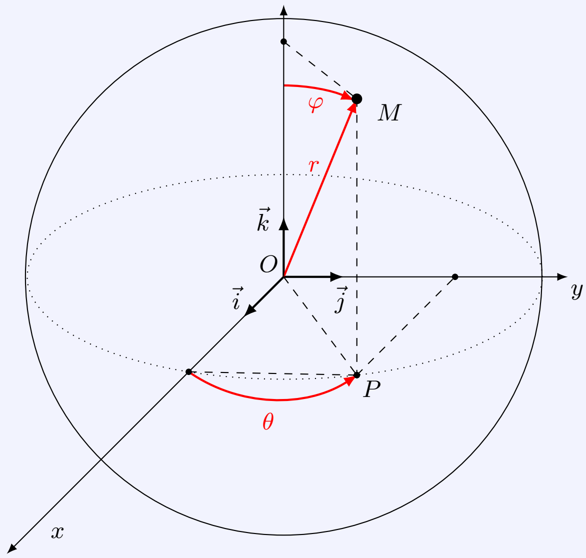
— *Déterminer les coordonnées cylindriques du point de coordonnées cartésiennes* $(1,-1,3)$.

— *Déterminer les coordonnées cartésiennes du point de coordonnées cylindriques* $\left(2,\frac{\pi}{6},-1\right)$.

Définition 1.6 (Coordonnées sphériques).

*On appelle **coordonnées sphériques** d'un point M de l'espace tout triplet de réels (r, θ, φ) avec $r \geqslant 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varphi \in [0, \pi]$ tel que :*

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}.$$



Remarques.

— *Les coordonnées sphériques d'un point de l'espace sont uniques.*

— *L'ensemble des points M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) avec $r > 0$ fixé et (θ, φ) variables est la sphère de centre O et de rayon r.*

— *L'ensemble des points M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) avec $r > 0$ fixé, θ (resp. φ) fixé et φ (resp. θ) variable est un cercle de centre O et de rayon r.*

Exemple 1.2.

— *Déterminer les coordonnées sphériques du point de coordonnées cartésiennes* $(\sqrt{3}, -1, -2\sqrt{3})$.

— *Déterminer les coordonnées cartésiennes du point de coordonnées sphériques* $\left(4, \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}\right)$.

2 Produit scalaire

2.1 Définitions

Définition 2.1 (Produit scalaire).
*Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, on définit le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :*

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non nuls} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque.
On a la même définition que dans le plan.

2.2 Propriétés

Dans l'espace, le produit scalaire entre deux vecteurs garde les mêmes propriétés que dans le plan.

Proposition 2.1 (Expression dans une base orthonormée).
Soient $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *une base orthonormée de l'espace et* $\vec{u}, \vec{v}$ *deux vecteurs de coordonnées respectives* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *dans cette base. Alors :*

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

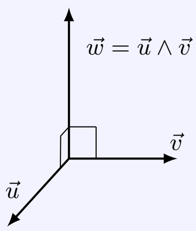
Proposition 2.2 (Distance dans une base orthonormale).
Si A et B sont deux points de coordonnées $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ dans un repère orthonormé :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

2.3 Produit vectoriel

Définition 2.2 (Définition géométrique du produit vectoriel).
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On définit le ***produit vectoriel*** *de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{cases} \vec{w} & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non nuls} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



avec $\vec{w}$ un vecteur vérifiant :

(i) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *est une base directe ;*
(ii) $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\left|\sin(\vec{u}, \vec{v})\right|$.

Remarques.

— *Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée du plan, alors $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\right)$ est une base orthonormée directe de l'espace.*
— *Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de l'espace, alors :*

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}.$$

Proposition 2.3 (Produit vectoriel et colinéarité).

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

Proposition 2.4 (Expression dans une base orthonormale **directe**).
Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont deux vecteurs de coordonnées respectives* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *dans une base orthonormée directe de l'espace, alors le vecteur* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *a pour coordonnées dans cette b.o.n.d :*

$$\begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}.$$

Remarque. On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$

Proposition 2.5 (Antisymétrie et bilinéarité).

(*i*) *Antisymétrie :*
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}).$$

(*ii*) *Linéarité par rapport à chaque variable :*
$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge (\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2}) &= \lambda_1(\vec{u} \wedge \vec{v_1}) + \lambda_2(\vec{u} \wedge \vec{v_2}) \\ (\lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2}) \wedge \vec{v} &= \lambda_1(\vec{u_1} \wedge \vec{v}) + \lambda_2(\vec{u_2} \wedge \vec{v}) \end{aligned}.$$

Proposition 2.6 (Interprétation géométrique du produit vectoriel).
Soient A, B *et* C *trois points de l'espace. Alors l'aire du triangle* ABC *est donnée par :*

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2}.$$

3 Produit mixte ou déterminant

3.1 Généralités

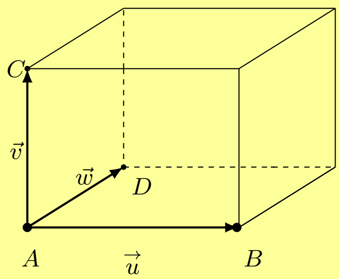
Définition 3.1 (Définition du produit mixte).
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *trois vecteurs de l'espace.*
On appelle ***produit mixte*** *ou* ***déterminant*** *de* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$, *le réel défini par :*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \,.\, (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

Remarque. On a aussi $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \,.\, \vec{w}$.

Proposition 3.1 (Interprétation géométrique du produit mixte).

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Alors $\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$ représente le volume d'un parallélépipède dont les côtés sont construits avec les trois vecteurs.



Proposition 3.2 (Produit mixte et coplanarité).

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ coplanaires} \iff \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = 0$$

Remarque. Quatre points A, B, C et D de l'espace sont sur un même plan si, et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

Proposition 3.3 (Base directe).
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires. Alors la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe si, et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$.

3.2 Propriétés

Proposition 3.4 (Antisymétrie).
Si on échange les deux vecteurs dans un produit mixte, ce dernier change de signe :

$$\begin{aligned}\left[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\right] &= -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\\ \left[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\right] &= -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\\ \left[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}\right] &= -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\end{aligned}$$

(Si permute les trois vecteurs de manière circulaire le produit mixte reste identique.)

Proposition 3.5 (Trilinéarité).
Le produit mixte est linéaire par rapport aux trois vecteurs :

$$\left[\lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \lambda_1 \left[\vec{u_1}, \vec{v}, \vec{w}\right] + \lambda_2 \left[\vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}\right].$$

(De même pour les deux autres variables).

Proposition 3.6 (Expression dans une base orthonormée directe).
Soient $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *une base orthonormée directe de l'espace et* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *trois vecteurs de coordonnées respectives* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ *dans cette base. Alors :*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}.$$

4 Plans

4.1 Représentations

Proposition 4.1 (Caractérisation d'un plan de l'espace).
Un plan $\mathcal{P}$ *est entièrement déterminé :*

(*i*) *Soit par la donnée de trois points non alignés* A, B *et* C. *Le plan* $\mathcal{P}$ *est donc l'ensemble des points* M *tels que les points* $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *soient coplanaires :*

$$M \in \mathcal{P} \iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$$

(*ii*) *Soit par la donnée d'un point* A *et de deux vecteurs non colinéaires (dits directeurs)* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$. *Le plan* $\mathcal{P}$ *est donc l'ensemble des points* M *tels que les vecteurs* $\overrightarrow{AM}$ *soient coplanaires avec les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *:*

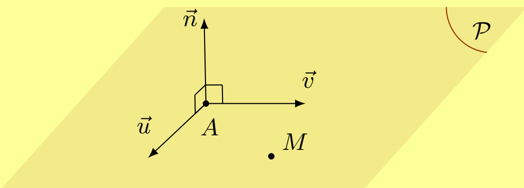
$$M \in \mathcal{P} \iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

On note $\mathcal{P} = A + \mathbf{R}\,\vec{u} + \mathbf{R}\,\vec{v}$.

(*iii*) *Soit par la donnée d'un point* A *et d'un vecteur* $\vec{n} \neq \vec{0}$ *orthogonal au plan.*

Le plan $\mathcal{P}$ *est donc l'ensemble des points* M *tels que les vecteurs* $\overrightarrow{AM}$ *soient orthogonaux au vecteur* $\vec{n}$ *:*

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0.$$



Proposition 4.2 (Équation cartésienne d'un plan).

(*i*) *Tout plan de l'espace admet une équation cartésienne du type :*

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ où } a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

(*ii*) *Réciproquement toute équation du type* $ax + by + cz + d = 0$ *avec* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ *définit un plan.*

Proposition 4.3 (Vecteur normal d'un plan).
Le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ *avec* $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ *admet le vecteur* $\vec{n}$ *de coordonnées* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *pour* ***vecteur normal****.*

Remarque.
Soit un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$. Tout vecteur $\vec{u}$ qui vérifie $\vec{u}\,.\,\vec{n}=0$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Proposition 4.4 (Parallélisme - Perpendicularité).
Soient $\mathcal{P}$ *le plan d'équation* $ax+by+cz+d=0$ *avec* $(a,b,c)\neq(0,0,0)$*, et*
$\mathcal{P}'$ *le plan d'équation* $a'x+b'y+c'z+d'=0$ *avec* $(a',b',c')\neq(0,0,0)$*.*
Notons leurs vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ *et* $\vec{n'}$*.*

(i) $\mathcal{P}//\mathcal{P}' \iff \vec{n}\wedge\vec{n'}=\vec{0}$.
(C.à.d. les vecteurs normaux sont colinéaires.)

(ii) $\mathcal{D}\perp\mathcal{D}' \iff \vec{n}.\vec{n'}=0$.
(C.à.d. les vecteurs normaux sont orthogonaux.)

Remarque.
Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants selon une droite si, et seulement si $\vec{n}\wedge\vec{n'}\neq\vec{0}$. Dans ce cas, les coordonnées des points de la droite sont solutions du système de rang 2 $\begin{cases} ax+by+cz+d & =0 \\ a'x+b'y+c'z+d' & =0 \end{cases}$.

Proposition 4.5 (Paramétrage d'un plan).
Le plan $\mathcal{P}$ *passant par le point* $A(x_A,y_A,z_A)$ *et dirigé par les deux vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ *est caractérisé par :*

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in\mathcal{P} &\iff \begin{cases} x=x_A+sx_u+tx_v \\ x=y_A+sy_u+ty_v \\ x=z_A+sz_u+tz_v \end{cases} ,(s,t)\in\mathbf{R}^2 \\ &\iff M=A+s\,\vec{u}+t\,\vec{v} \text{ où } s,t\in\mathbf{R} \\ &\iff \mathcal{P}=A+\mathbf{R}\,\vec{u}+\mathbf{R}\,\vec{v}\,. \end{aligned}$$

Exemple 4.1.

— *Donner une paramétrisation et une équation cartésienne d'un plan passant par le point* $A(1,2,3)$ *et dirigée par* $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

— *Déterminer une paramétrisation et une équation cartésienne du plan passant par* $A(1,2,3)$, $B(1,0,1)$ *et* $C(0,1,1)$*.*

4.2 Distance d'un point à un plan

Définition 4.1 (Distance d'un point à un plan).
La distance du point M_0 à un plan $\mathcal{P}$ est la distance M_0H avec H le projeté orthogonal de M_0 sur le plan $\mathcal{P}$.

Proposition 4.6 (Expression de la distance d'un point à un plan).
Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par le point A, de vecteurs directeurs $(\vec{u}, \vec{v})$, de vecteur normal $\vec{n}$ et d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque de l'espace.
La distance de M_0 à $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|\det(\overrightarrow{AM_0}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{|\overrightarrow{AM_0}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemple 4.2.
— *Calculer la distance de O au plan $\mathcal{P} : x - y + z = 1$.*
— *Calculer, par deux méthodes, la distance de $A(1, -1, 2)$ au plan $\mathcal{P}$ passant par $B(1, 0, 2), C(0, 1, -1)$ et $D(-2, 1, 3)$.*

5 Droites

5.1 Représentations

Proposition 5.1 (Caractérisation d'une droite de l'espace).
Une droite $\mathcal{D}$ est entièrement déterminée :

(*i*) *Soit par la donnée de deux points non alignés A et B. La droite $\mathcal{D}$ est donc l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires :*

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

(*ii*) *Soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$. La droite $\mathcal{D}$ est donc l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires :*

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}.$$

On note $\mathcal{D} = A + \mathbf{R}\,\vec{u}$.

(*iii*) *Soit par la donnée de deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. La droite $\mathcal{D}$ est alors l'ensemble des points M appartenant à la fois à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{P}'$, c'est-à-dire dont les coordonnées vérifient le système d'équations formé par les équations de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$.*

Proposition 5.2 (Paramétrage d'une droite).
La droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ est paramétrée par :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = x_A + tx_u \\ x = y_A + ty_u \\ x = z_A + tz_u \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Proposition 5.3 (**Système** d'équations cartésiennes d'une droite)**.**

(i) Toute droite de l'espace admet un système d'équations cartésiennes du type :

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d=0 \end{cases} \quad \text{où } (a,b,c) \text{ et } (a',b',c') \text{ non proportionnels}$$

(ii) Réciproquement tout système du type précédent définit une droite.

Exemple 5.1.

— *Déterminer une représentation paramétrique et un système d'équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(1,0,2)$ et $C(0,1,-1)$.*

— *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* $\mathcal{D} : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$.

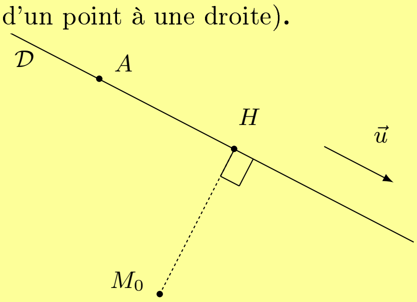
5.2 Distance à une droite

Définition 5.1 (Distance d'un point à une droite)**.**
La distance du point M_0 à une droite $\mathcal{D}$ est la distance M_0H avec H le projeté orthogonal de M_0 sur la droite $\mathcal{D}$.

Proposition 5.4 (Expression de la distance d'un point à une droite)**.**

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par le point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$.
Soit M_0 un point quelconque de l'espace.
La distance de M_0 à $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$d(M_0,\mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM_0} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$



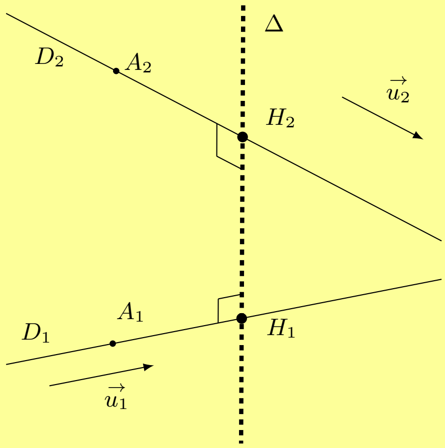
Exemple 5.2.

— *Calculer la distance de $A(1,-1,2)$ à la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(1,0,2)$ et $C(0,1,-1)$.*
— *Calculer la distance de O à la droite $\mathcal{D} : x=y=z+1$.*

Proposition 5.5 (Perpendiculaire commune de deux droites).
Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites non parallèles et dirigées respectivement par $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.
*Il existe une unique droite Δ rencontrant orthogonalement $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$; cette droite est appelée la **perpendiculaire commune** à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et on a :*

$$\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2,$$

où $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux plans passant respectivement par A_1 et A_2 et dirigés par $\left(\vec{u_1}, \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}\right)$ et $\left(\vec{u_2}, \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}\right)$.



Proposition 5.6 (Distance entre deux droites).
Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ passant resp. par A_1et A_2,et dirigées respectivement par $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.
La distance entre deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est la distance H_1H_2 où H_1 et H_2 sont les intersections de la (ou d'une) perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

(*i*) *Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ parallèles alors :*

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{\|\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \vec{u_1}\|}{\|\vec{u_1}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \vec{u_2}\|}{\|\vec{u_2}\|}.$$

(*ii*) *Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles alors :*

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{\left|\det\left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right)\right|}{\|\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}\|}.$$

Remarque. La deuxième formule découle de la formule du volume du parallélipipède construit à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

Exemple 5.3.

Soient la droite $\mathcal{D}_1$ passant par $B(1, 0, 2)$ et $C(0, 1, -1)$, et la droite $\mathcal{D}_2 : x = y = z$. Montrer que ces droites ne sont ni parallèles, ni coplanaires. Calculer la distance de $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{D}_2$.

6 Sphères

6.1 Généralités

Définition 6.1 (Sphère).
*Soit Ω un point du plan et R un réel strictement positif. On appelle **sphère** de centre Ω et de rayon R, l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$.*

Proposition 6.1 (Équation cartésienne d'une sphère).
Toute sphère de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon $R \geqslant 0$ admet pour équation :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2.$$

Proposition 6.2 (Représentation paramétrique d'un cercle).
Tout cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon $R \geqslant 0$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= x_\Omega + R\sin\varphi\cos\theta \\ y &= y_\Omega + R\sin\varphi\sin\theta \\ z &= z_\Omega + R\cos\varphi \end{cases} , \theta \in [0, 2\pi[, \varphi \in [0, \pi]$$

Proposition 6.3 (Caractérisation d'une sphère avec son diamètre).
Soit $\mathcal{S}$ une sphère de diamètre $[AB]$.

$$M \in \mathcal{S} \iff \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$

6.2 Droites et plans par rapport à une sphère

Proposition 6.4 (Positions relatives d'une droite par rapport à une sphère).
Soient $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R, et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace.

(*i*) *Si $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$, alors $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{S}$ en un seul point M , on dit que $\mathcal{D}$ est **tangente** à $\mathcal{S}$ en M ;*
(*ii*) *Si $d(\Omega, \mathcal{D}) < R$, alors $\mathcal{D}$ coupe la sphère $\mathcal{S}$ en deux points distincts ;*
(*iii*) *Si $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$, alors $\mathcal{P}$ ne coupe pas $\mathcal{S}$.*

Proposition 6.5 (Positions relatives d'un plan par rapport à une sphère).
Soient $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R, et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.

(*i*) *Si $d(\Omega, \mathcal{P}) = R$, alors $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{S}$ en un seul point M , on dit que $\mathcal{P}$ est **un plan tangent** à $\mathcal{S}$ en M ;*
(*ii*) *Si $d(\Omega, \mathcal{P}) < R$, alors $\mathcal{P}$ coupe la sphère $\mathcal{S}$ en un cercle ;*
(*iii*) *Si $d(\Omega, \mathcal{P}) > R$, alors $\mathcal{D}$ ne coupe pas $\mathcal{S}$.*

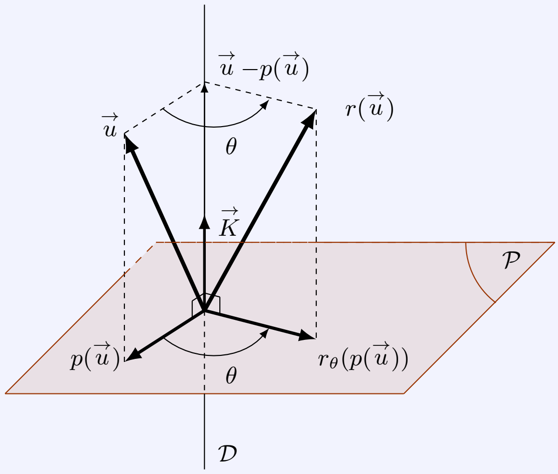
7 Transformations vectorielles de l'espace

7.1 Rotations vectorielles

Définition 7.1 (Rotation).
Soit $\mathcal{D}$ une droite vectorielle (c'est-à-dire passant par O) dirigée par $\overrightarrow{K}$ et $\theta \in \mathbf{R}$.
*On appelle **rotation vectorielle** d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\overrightarrow{K}$ et d'angle θ, l'application r de l'espace qui à un vecteur $\overrightarrow{u}$ associe le vecteur :*

$$\overrightarrow{v} = r(\overrightarrow{u}) = r_\theta(p(\overrightarrow{u})) + \overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u}),$$

où p est la projection orthogonale sur le plan vectoriel $\mathcal{P}$ orthogonal à $\overrightarrow{K}$, et r_θ est la rotation vectorielle dans ce plan.



Proposition 7.1 (Matrice de rotation).
Soit $\mathcal{D}$ une droite vectorielle dirigée et orientée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{K}$ et $\theta \in \mathbf{R}$.
Soit r la rotation vectorielle d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ.
Si un vecteur $\overrightarrow{u}$ est de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$, l'image de $\overrightarrow{u}$ par r est le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ vérifiant :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_\theta \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec } R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

*R_θ s'appelle **matrice de la rotation** r dans la base $\mathcal{B}$.*

Exemple 7.1. *Déterminer La matrice de rotation d'axe $(O; \overrightarrow{k})$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.*

Remarque.

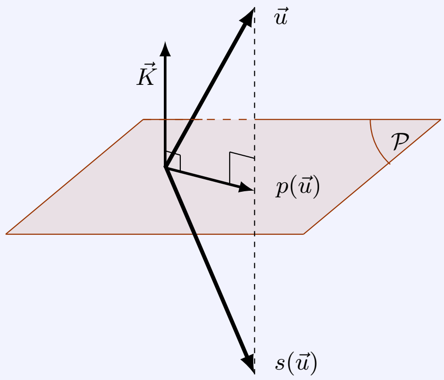
Les rotations vectorielles de l'espace possèdent les mêmes propriétés que les rotations vectorielles du plan : conservation des longueurs, des mesures d'angles.
De même : $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$, R_θ est inversible et $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

7.2 Réflexions vectorielles

Définition 7.2 (Réflexion)**.**
*Soit $\mathcal{P}$ un plan vectoriel de l'espace. On appelle **réflexion vectorielle** ou **symétrie vectorielle** par rapport au plan $\mathcal{P}$, l'application s de l'espace qui à un vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $\vec{v} = s(\vec{u})$ qui vérifie :*

$$\vec{v} = \vec{u} - p(\vec{u}),$$

où p est la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$.



Proposition 7.2 (Matrice de réflexion)**.**
Soit s la symétrie vectorielle par rapport au plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{K}$.
Si un vecteur $\vec{u}$ est de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$,
l'image de $\vec{u}$ par s est le vecteur $\vec{v} = s(\vec{u})$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ vérifiant :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \end{pmatrix} = S \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*S s'appelle **matrice de la réflexion** s dans la base $\mathcal{B}$.*

Exemple 7.2. *L'image du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ par rapport au plan vectoriel $(O; \vec{i}, \vec{k})$ est le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \end{pmatrix}$. La matrice de rotation associée à s dans la base $\mathcal{B} = (\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ est $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Remarque.
Les réflexions vectorielles de l'espace possèdent les mêmes propriétés que les symétries vectorielles du plan : conservation des longueurs, des mesures d'angles géométriques.
De même : S est inversible et $S^{-1} = S$.

Remarque.
Une réflexion par rapport à une droite vectorielle $\mathcal{D} = (O, \vec{K})$ correspond à une rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle π.