

TD 20 : Espaces vectoriels

Exercice 1

Les ensembles E suivants sont-ils des $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels ?

- | | |
|--|--|
| <p>1/ $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$</p> <p>2/ $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x + y = 1\}$</p> <p>3/ $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + y - z = 0 \text{ et } x + 2y + z = 0\}$</p> <p>4/ $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x.y > 1\}$</p> <p>5/ $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = y\}$</p> <p>6/ $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x^2 + y^2 - z = 0\}$</p> <p>7/ $E = \{(x, 2x, 4x) \text{ où } x \in \mathbf{R}\}$</p> <p>8/ $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) / M \text{ inversible}\}$</p> <p>9/ $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) / M \text{ symétrique}\}$</p> <p>10/ $E =$ L'ensemble des solutions de l'équation différen-</p> | <p>tielle $y'' - y' + y = 3x^2 + 1$.</p> <p>11/ $E = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} / f(1) = 2f(1)\}$</p> <p>12/ $E = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} / f(1) + f(0) = 1\}$</p> <p>13/ $E = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} / \exists n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in [-n, n], f(x) = 0\}$</p> <p>14/ $E = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} / f \text{ fonction polynomiale de degré } 2\}$</p> <p>15/ $E = \{(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} / \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}$</p> <p>16/ $E = \{(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} / (u_n) \text{ est bornée}\}$</p> <p>17/ $E = \{(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} / (u_n) \text{ est monotone}\}$</p> <p>18/ $E = \{(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} / (u_n) \text{ est convergente}\}$</p> |
|--|--|

Exercice 2

- 1/ Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (x, y, z) de $\mathbf{R}^3$ soit dans le sev engendré par les trois vecteurs $(2, 6, -1)$, $(0, -3, 1)$ et $(4, 9, -1)$ (ces conditions sont appelées **système d'équations** du sev).
- 2/ Même question avec $(1, 2, -3)$, $(-1, -2, 3)$ et $(3, 6, -9)$.

Exercice 3

Trouver une base et un système d'équations cartésiennes (ou une équation cartésienne) du sev F de E dans les cas suivants :

- 1/ $E = \mathbf{R}^3$, $F = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 0, 2)$.
- 2/ $E = \mathbf{R}^3$, $F = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, 3, -1)$.
- 3/ $E = \mathbf{R}^4$, $F = \text{Vect}(u, v, w, t)$ avec $u = (1, 2, 2, 1)$, $v = (5, 6, 6, 5)$, $w = (-1, -3, 4, 0)$ et $t = (0, 4, -3, -1)$.

Exercice 4

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées dans $\mathbf{R}^3$.

- $A = \{(1; 3; 2), (2; 5; 1)\}$
- $B = \{(1; 3; 2), (1; 1; 2), (2; 6; 4)\}$
- $C = \{(1; 1; 1), (1; 2; -1), (-1; 1; 1)\}$
- $D = \{(1; -1; 1), (1; -4; -5), (1, -2, -1)\}$

Exercice 5

Les familles (f, g, h) d'applications suivantes de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ sont-elles libres ?

- 1/ $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto \cos^2(x)$, $h : x \mapsto x \cos(2x)$.

2/ $f : x \mapsto x - 1$, $g : x \mapsto |x|$, $h : x \mapsto x + 2$.

Exercice 6

Soient E un $\mathbf{K}$ -ev, $n \in \mathbf{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E . Considérons les vecteurs définis par :

$$u_1 = e_1, u_2 = e_1 + e_2, \dots, u_n = e_1 + \dots + e_n.$$

Montrer que la famille $(u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de vecteurs de E est libre.

Exercice 7

Montrer que les sev $F = \text{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2))$ et $G = \text{Vect}((3, 7, 0), (5, 0, -7))$ de $\mathbf{R}^3$ sont égaux.

Exercice 8

On considère dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ la famille :

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Prouver que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Puis déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 9

Considérons $F = \{P \in \mathbf{R}_n[X] / P(1) = 0\}$.

1/ Montrer que F est sev de $\mathbf{R}_n[X]$.

2/ Trouver une famille S telle que $\text{Vect}(S) = F$.

Exercice 10

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$,

$G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z = 0\}$ et

$H = \text{Vect}((1; -1; -1), (0; 1; 2), (3; -1; 1))$.

1. Démontrer que F , G et H sont des s.e.v. de $\mathbf{R}^3$.
2. Donner une base de F , une base de G , et une base de H .
3. Prouver que $F = H$.
4. Prouver que $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 11

Soient a, b deux réels tels que $a < b$.

Soient $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[a, b]$,

$F = \left\{ f \in E / \int_a^b f(t) dt = 0 \right\}$ et $G = \{f \in E / f \text{ constante}\}$.

Démontrer que F et G sont des s.e.v. supplémentaires de E .

Exercice 12

Soient E un e.v. et A , B et C trois sev de E .

Montrer que si A et B sont supplémentaires dans E , et si $A \subset C$ alors A et $B \cap C$ sont supplémentaires dans C .

Exercice 13

Soit $E = \mathbf{R}^n$ avec $n \in \mathbf{N}$ et $n \geq 2$. On considère $F = \text{Vect}(e)$ avec $e = (1, \dots, 1)$ et $G = \{(x_1, \dots, x_n) \in E / \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$.

Montrer que G est un sev de E et $F \oplus G = E$.

Exercice 14

Soient E un $\mathbf{K}$ -e.v. et F , G et H des s.e.v. de E . Montrer que si $G \subset F$, alors $(F \cap G) + (F \cap H) = F \cap (G + H)$.

Donner un exemple où $(F \cap G) + (F \cap H) \neq F \cap (G + H)$.