TD 22 : Espaces vectoriels en dimension finie

Exercice 1

Déterminer si les familles suivantes sont des bases de $\mathbf{R}^3$.

1/ (u, v, w) avec $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 1)$.

2/ (u, v) avec $u = (1, 2, 1)$ et $u = (0, 4, 2)$.

3/ (u, v, w) avec $u = (1, 2, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, 1, 2)$.

Exercice 2

Prouver que les ensembles suivants sont des $\mathbf{R}$-e.v. puis, pour chacun, en déterminer une base et la dimension.

1/ $F = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$.

2/ $F = \text{Vect}(a, b, c)$ où $a = (1, 1, 1, 1)$, $b = (1, 2, 3, 2)$ et $c = (2, 4, 6, 4)$.

3/ $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,/ x - 2y + t = 0 \text{ et } x - 3y - t = 0 \text{ et } x + z = 0\right\}$.

4/ $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b-a \\ a+b & a \end{pmatrix} \text{ où } a, b \in \mathbf{R} \right\}$.

5/ $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ où f_1, f_2 et f_3 sont définies sur $\mathbf{R}$ par respectivement $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos(2x)$ et $f_3(x) = \cos^2(x)$.

6/ $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,/ x = 2z = 3t\right\}$.

7/ $F = \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \,/ f \text{ fonction affine }\right\}$.

8/ $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \,/ M \text{ symétrique }\}$.

Exercice 3

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère $u = (2, 0, 1)$, $v = (1, 3, -2)$, $w = (5, 3, 0)$ et $t = (0, 6, -5)$.

On pose $F = \text{Vect}(u, v)$ et $G = \text{Vect}(w, t)$.

1/ Montrer que $E = F$.

2/ Déterminer un sous-espace vectoriel H de $\mathbf{R}^3$ tel que $\mathbf{R}^3 = F \oplus H$.

Exercice 4

Dans $\mathbf{R}^4$, on considère $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $a = (0, 0, 1, 0)$ et $b = (1, 1, 0, -1)$.

On pose $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(a, b)$.

Déterminer une base et la dimension de chacun des s.e.v. F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 5

Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des s.e.v. suivants :

1/ $F = \text{Vect}(u, v, w)$ où $u = (-1, 1, 0), v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$.

2/ $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\right\}$.

3/ $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \,/ M \text{ symétrique}\}$.

Exercice 6

Soit E un $\mathbf{R}$- ev de dimension n $(n \geqslant 2)$ et H un hyperplan de E, $a \in E$ tel que $a \in H$.

1/ Montrer que $E = H \oplus \mathbf{R}a$.

2/ Montrer qu'il existe une base de E contenant a et n'ayant aucun vecteur de H.

Exercice 7

Soit $E = \mathbf{R}_6[X], F = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$ et $Q = (X-1)(X-2)$.

1/ Montrer que F est une sev de E.

2/ Montrer que la famille $(Q, XQ, X^2Q, X^3Q, X^4Q)$ est libre.

3/ Déterminer la dimension de F et donner un supplémentaire de F dans E.

Exercice 8

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère $u = (a, 1, 1), v = (1, a, 1), w = (1, 1, a)$. Déterminer le rang de (u, v, w) en fonction de a.