TD 22 : Espaces vectoriels en dimension finie

Exercice 1

Déterminer si les familles suivantes sont des bases de $\mathbf{R}^3$.

1/ (u, v, w) avec $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 1)$.

2/ (u, v) avec $u = (1, 2, 1)$ et $u = (0, 4, 2)$.

3/ (u, v, w) avec $u = (1, 2, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, 1, 2)$.

Solution:

Toute base de $\mathbf{R}^3$ qui est de dimension 3 est une famille de 3 éléments et libre.

1/ Il suffit de vérifier si la famille est libre qui est le cas pour cette question.

2/ Ce n'est pas une base car la famille est de cardinal 2.

3/ La famille est une base car elle est libre.

Exercice 2

Prouver que les ensembles suivants sont des $\mathbf{R}$-e.v. puis, pour chacun, en déterminer une base et la dimension.

1/ $F = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$.

2/ $F = \text{Vect}(a, b, c)$ où $a = (1, 1, 1, 1)$, $b = (1, 2, 3, 2)$ et $c = (2, 4, 6, 4)$.

3/ $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,/ x - 2y + t = 0 \text{ et } x - 3y - t = 0 \text{ et } x + z = 0\right\}$.

4/ $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b-a \\ a+b & a \end{pmatrix} \text{ où } a, b \in \mathbf{R} \right\}$.

5/ $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ où f_1, f_2 et f_3 sont définies sur $\mathbf{R}$ par respectivement $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos(2x)$ et $f_3(x) = \cos^2(x)$.

6/ $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,/ x = 2z = 3t\right\}$.

7/ $F = \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \,/ f \text{ fonction affine } \right\}$.

8/ $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \,/ M \text{ symétrique } \}$.

Solution:

Remarquons tout d'abord que tous les ensembles engendrés par des vecteurs, c'est-à-dire définis par un « Vect », sont de fait des espaces vectoriels. Pour ceux qui ne le sont pas encore, on tentera de le faire, sachant que cela fournit de plus une famille génératrice et qu'il ne suffit plus ensuite que d'en extraire une famille libre.

1/ Les vecteurs $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$ étant non colinéaires, ils forment une base de $F = \text{Vect}(u, v)$ qui est donc de dimension 2.

2/ Les vecteurs b et c étant colinéaires, on en déduit que $F = \text{Vect}(a, b, c) = \text{Vect}(a, b)$. Comme les vecteurs a et b sont non colinéaires, ils forment alors une base de F qui est donc de dimension 2.

3/ Remarquons que nous avons :

$$\begin{cases} x-2y+t=0 \\ x-3y-t=0 \\ x+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-5y \overset{(L_1+L_2)}{=} 0 \\ x-3y-t=0 \\ z=-x \end{cases} \iff \begin{cases} y=\dfrac{2}{5}x \\ t=-\dfrac{1}{5}x \\ z=-x \end{cases}.$$

On en déduit que l'on a $F=\mathrm{Vect}(5,2,-5,-1)$ qui est donc de dimension 1, $(5,2,-5,-1)$ en étant une base.

4/ En remarquant que l'on a :

$$\begin{pmatrix} a & b-a \\ a+b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aA+bB,$$

on en déduit que $F=\mathrm{Vect}(A,B)$, et les matrices A et B n'étant pas colinéaires, elles forment une base de F qui est donc de dimension 2.

5/ La famille est liée car $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$ d'où $f_2-2f_3+f_1=0$.

6/ Il est clair que $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \;/\; x=2z=3t\right\}=\mathrm{Vect}((6,0,3,2),(0,1,0,0))$, donc que F est un espace vectoriel de dimension 2 et que $((6,0,3,2),(0,1,0,0))$ en est une base puisque ces 2 vecteurs sont non colinéaires.

7/ Réécrivons F de la manière suivante :

$$F=\left\{f\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}} \;/\; \exists(a,b)\in\mathbf{R}^2,\ f(x)=ax+b\right\}=\mathrm{Vect}(f_1,f_2),$$

où $f_1 : x\mapsto x$ et $f_2 : x\mapsto 1$. Les fonctions f_1 et f_2 étant non proportionnelles, on en déduit qu'elles forment une base de F qui est donc de dimension 2.

8/ Remarquons que nous avons :

$$\begin{aligned} \forall M\in F \quad &\iff \exists(a,b,c)\in\mathbf{R}^3/M=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \exists(a,b,c)\in\mathbf{R}^3/\ M=a\,A+b\,B+c\,C, \end{aligned}$$

ce qui implique que $F=\mathrm{Vect}(A,B,C)$. D'autre part, on a pour tous $a,b,c\in\mathbf{R}$:

$$aA+bB+cC=0 \implies \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies a=b=c=0,$$

donc la famille (A,B,C) est libre, elle forme ainsi une base de F qui est donc de dimension 3.

Exercice 3

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère $u=(2,0,1)$, $v=(1,3,-2)$, $w=(5,3,0)$ et $t=(0,6,-5)$.

On pose $F=\mathrm{Vect}(u,v)$ et $G=\mathrm{Vect}(w,t)$.

1/ Montrer que $E = F$.

2/ Déterminer un sous-espace vectoriel H de $\mathbf{R}^3$ tel que $\mathbf{R}^3 = F \oplus H$.

Solution:

On peut traiter cet exercice avec une méthode géométrique et on suppose que les coordonnées des vecteurs sont données relativement à une base orthonormée directe.

3/ En remarquant que l'on a $u \wedge v = (-3, 5, 6)$ et $v \wedge t = (-15, 25, 30) = 5(u \wedge v)$, on obtient immédiatement que F et G sont des plans vectoriels orthogonaux à une même droite vectorielle, donc que $F = G$.

4/ Pour obtenir un sous-espace vectoriel H de $\mathbf{R}^3$ tel que $\mathbf{R}^3 = F \oplus H$ il suffit, d'après la question précédente, de prendre $H = \mathrm{Vect}((-3, 5, 6))$.

Exercice 4

Dans $\mathbf{R}^4$, on considère $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $a = (0, 0, 1, 0)$ et $b = (1, 1, 0, -1)$.

On pose $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ et $G = \mathrm{Vect}(a, b)$.

Déterminer une base et la dimension de chacun des s.e.v. F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Solution:

- Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $xu + yv + zw = 0$. On obtient alors :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies x = y = z = 0.$$

  On en déduit que la famille (u, v, w) est libre et que $\dim(F) = 3$.

- Les vecteurs a et b étant non colinéaires, on obtient immédiatement $\dim(G) = 2$.
- Il vaut mieux commencer par $F + G$ car on montre facilement que la famille (u, v, w, a) est libre car :

$$xu + yv + zw + ta = 0 \implies \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies x = y = z = t = 0.$$

  On en déduit que $\dim(F + G) \geqslant 4$, et comme $F + G \subset \mathbf{R}^4$ donc $\dim(F + G) = 4$.

- On trouve alors :

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Exercice 5

Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des s.e.v. suivants :

1/ $F = \text{Vect}(u, v, w)$ où $u = (-1, 1, 0), v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$.

2/ $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\}$.

3/ $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \,/ M \text{ symétrique}\}$.

Solution:

Exercice 6

Soit E un $\mathbf{R}$- ev de dimension n ($n \geqslant 2$) et H un hyperplan de E, $a \in E$ tel que $a \in H$.

1/ Montrer que $E = H \oplus \mathbf{R}a$.

2/ Montrer qu'il existe une base de E contenant a et n'ayant aucun vecteur de H.

Solution:

1/ On a d'une part H hyperplan donc $\dim(H) = n-1$ et comme $a \neq 0$ alors $\dim(\mathbf{R}a) = 1$. D'autre part, on a également $a \notin H$ d'où $H \cap \mathbf{R}a = \{0_E\}$, ce qui entraîne que l'on a bien $E = H \oplus \mathbf{R}a$.

2/ Puisque nous avons $E = H \oplus \mathbf{R}a$, on en déduit qu'il existe une base de E de la forme $B = (e_1, \cdots, e_{n-1}, a)$ avec $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ base de H.

Nous allons alors considérer la famille $B' = (a + e_1, \cdots, a + e_{n-1}, a)$ dont aucun élément n'est dans H puisque on sait que $a \notin H$ et que si on avait $x = a + e_i \in H$, alors on aurait $a = x - e_i \in H$ puisque H est stable par combinaisons linéaire en tant que sous-espace vectoriel de E.

Cette famille comportant n éléments ($n = \dim(E)$), il suffit de montrer qu'elle est libre pour avoir une base.

Or on a :

$$\begin{aligned}
& \lambda_1(a + e_1) + \cdots + \lambda_{n-1}(a + e_{n-1}) + \lambda_n a = 0 \\
\Longrightarrow \quad & \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a = 0 \\
\Longrightarrow \quad & \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \qquad \text{car } B \text{ base} \\
\Longrightarrow \quad & \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que la famille B' est libre, donc que c'est une base de E, et elle contient bien a mais ne possède aucun vecteur de H.

Exercice 7

Soit $E = \mathbf{R}_6[X], F = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$ et $Q = (X-1)(X-2)$.

1/ Montrer que F est une sev de E.

2/ Montrer que la famille $(Q, XQ, X^2Q, X^3Q, X^4Q)$ est libre.

3/ Déterminer la dimension de F et donner un supplémentaire de F dans E.

Solution:

1/ Le polynôme nul est clairement dans F et, si on a $P_1, P_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors on a $P_1 + \lambda P_2 \in E$ et :

$$(P_1 + \lambda P_2)(1) = P_1(1) + \lambda P_2(1) = 0 \quad \text{et} \quad (P_1 + \lambda P_2)(2) = P_1(2) + \lambda P_2(2) = 0.$$

Donc F est bien une sous-espace vectoriel de E.

2/ Puisque la famille $(Q, XQ, X^2Q, X^3Q, X^4Q)$ est échelonnée en degrés (qui vont de 2 à 6), on a immédiatement que c'est une famille libre.

3/ La famille $(1, X, Q, XQ, X^2Q, X^3Q, X^4Q)$ étant également échelonnée en degrés (qui vont de 0 à 6), on déduit que c'est, elle aussi, une famille libre. Or elle contient 7 éléments, donc c'est une base de E car $\dim(E) = 7$.

Il suffit alors de remarquer que ses 2 premiers éléments (1 et X) ne sont pas dans F, alors que les 5 autres (Q, XQ, X^2Q, X^3Q et X^4Q) y sont pour conclure que :

- $F = \text{Vect}(Q, XQ, X^2Q, X^3Q, X^4Q)$ et $\dim(F) = 5$;
- $E = F \oplus \text{Vect}(1, X)$.

Exercice 8

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère $u = (a, 1, 1), v = (1, a, 1), w = (1, 1, a)$. Déterminer le rang de (u, v, w) en fonction de a.

Solution:

Déterminons $\text{rg}(v_1, v_2, v_3)$; pour cela, on forme la matrice associée à la famille (v_1, v_2, v_3) et on applique la méthode du pivot de Gauss pour la réduire :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} & \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice de (v_1, v_2, v_3) est de rang égal au nombre de pivots non-nuls. Sachant que $2 - a - a^2 = 0$ si, et seulement, si

$a = 1$ ou $a = -2$, alors :

$$\begin{cases} a = 1 & \Longrightarrow \quad \mathrm{rg}(u, v, w) = 1 \\ a = -2 & \Longrightarrow \quad \mathrm{rg}(u, v, w) = 2 \\ a \notin \{1, -2\} & \Longrightarrow \quad \mathrm{rg}(u, v, w) = 3 \end{cases} .$$