Table des matières

21 Espaces vectoriels **1**
1 Espaces vectoriels 1
1.1 Structure d'espace vectoriel 1
1.2 Sous-espace vectoriel 3
2 Familles finies de vecteurs 4
2.1 Familles génératrices 4
2.2 Familles libres - Familles liées 6
2.3 Bases 7
3 Somme de deux sous-espaces vectoriels 8
3.1 Généralités 8
3.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires 9

Chapitre 21

Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 1.1 (Loi externe)**.**
Soit E un ensemble, on appelle ***loi de composition externe*** *sur E toute application de $\mathbf{K} \times E \longrightarrow E$ qui à tout élément x de E et tout scalaire λ de $\mathbf{K}$ associe un élément de E que l'on note $\lambda \,.\, x$ ou encore λx.*

Définition 1.2 (Groupe)**.**
Soit E un ensemble, on appelle ***groupe*** *un couple $(E, *)$ dont $*$ est une opération qui satisfait les quatre axiomes suivants :*

- (i) ***Loi de composition interne*** *:*
  Pour tous a et b éléments de E, $a * b \in E$.
- (ii) ***Associativité*** *:*
  Pour tous éléments a, b et c de E, alors $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- (iii) ***Élément neutre****.*
  Il existe un élément e de E tel que, pour tout a dans E, $e * a = a * e = a$, « e est appelé ***élément neutre*** *du groupe $(E, *)$.*
- (iv) ***Symétrique****.*
  Pour tout élément a de E, il existe b dans E tel que $a * b = b * a = e$, où e est l'élément neutre. b est appelé ***symétrique*** *de a.*

Exemple 1.1. *$(\mathbf{Z}, +), (\mathbf{K}, +), (\mathbf{K}[X], +)$ et $(\mathbf{K}^*, \times)$ sont des groupes, mais $(\mathbf{N}, +), (\mathbf{Z}, \times)$ et $(\mathbf{K}[X], \times)$ ne sont pas des groupes.*

Définition 1.3 (Espace vectoriel)**.**
On appelle espace vectoriel sur K (ou K-espace vectoriel) tout ensemble E muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe notée $\cdot$ tel que :

(i) $(E,+)$ *est un groupe commutatif*
(ii) *la loi externe $\cdot$ vérifie les quatre propriétés :*
  (a) *Pour tous éléments λ, μ de $\mathbf{K}$ et tout élément x de E, on a $(\lambda+\mu)x = \lambda\cdot x+\mu\cdot x$.*
  (b) *Pour tout élément λ de $\mathbf{K}$ et tous éléments x, y de E, on a $\lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x+\lambda\cdot y$.*
  (c) *Pour tous éléments λ, μ de $\mathbf{K}$ et tout élément x de E, $\lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda\mu)\cdot x$.*
  (d) *Pour tout élément x de E, $1\cdot x = x$.*

Exemples 1.2.

1. $(\mathbf{K},+,\cdot)$ *est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*
2. $(\mathbf{C},+,\cdot)$ *est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, mais $(\mathbf{R},+,.)$ n'est pas un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.*
3. $(\mathbf{K}[X],+,\cdot)$ *est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*
4. *Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, alors $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel pour les lois interne et externe définies par :*
   (a) $\forall A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}$, $\forall B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}$, $A+B = (A_{i,j}+B_{i,j})$;
   (b) $\forall A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda\cdot A = (\lambda A_{i,j})$.
5. *Soit X un ensemble non vide et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel alors l'ensemble E^X des applications de X dans E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel pour les lois interne et externe définies par :*
   (a) $\forall (f,g) \in (E^X)^2$, $\forall x \in X$, $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$;
   (b) $\forall f \in E^X$, $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbf{K}$, $(\lambda\cdot f)(x) = \lambda\cdot f(x)$.

   En particulier, l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.
6. *L'ensemble des vecteurs du plan (ou de l'espace) est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ pour les lois usuelles.*

Définition 1.4 (Vocabulaire)**.**
Pour un $\mathbf{K}$-espace vectoriel :

(i) *les éléments de E sont appelés* ***vecteurs*** *;*
(ii) *les éléments de $\mathbf{K}$ sont appelés* ***scalaires*** *;*
(iii) *la loi $\cdot$ est appelée* ***multiplication par un scalaire****.*

Théorème 1.1 (Espace vectoriel produit)**.**
Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.
On munit l'ensemble produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ des deux lois $+$ et $\cdot$ définies par :

(i) $\forall (v_1,\ldots,v_n), (w_1,\ldots,w_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$:

$$(v_1,\ldots,v_n)+(w_1,\ldots,w_n) = (v_1+w_1,\ldots,v_n+\ldots,w_n).$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall (v_1,\ldots,v_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$:

$$\lambda\cdot(v_1,\ldots,v_n) = (\lambda\cdot v_1,\ldots,\lambda\cdot v_n).$$

Alors $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Exemple 1.3. *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(\mathbf{K}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 1.5 (Sous-espace vectoriel)**.**
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un ***sous-espace vectoriel*** *(sev) de E si :*

(i) $F \neq \varnothing$;
(ii) $\forall (x,y) \in F^2$, $x + y \in F$;
(iii) $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall x \in F, \lambda.x \in F$.

Exemple 1.4. *$\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*

Proposition 1.1.
Tout sous-espace vectoriel de E est un espace vectoriel pour les lois induites par celles de E.

Remarque. On montre rarement qu'un ensemble est un espace vectoriel en utilisant la définition 1.3 page 2, mais plutôt que c'est un sev d'un espace vectoriel connu.

Proposition 1.2 (Caractérisation d'un sev)**.**
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :

(i) $F \neq \varnothing$;
(ii) $\forall (x,y) \in F^2$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda.x + y \in F$.

Exercices 1.1.

1. *Montrer que l'ensemble $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, x - y + 2z = 0\}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.*
2. *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble des applications continues de I vers $\mathbf{K}$ et l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de I vers $\mathbf{K}$ sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.*
3. *Montrer que l'ensemble $\mathbf{K}_n[X]$ des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*
4. *Soit a une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*
5. *Soient a et b deux scalaires dans $\mathbf{K}$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*
6. *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbf{R})$. Soit $AX = 0$ un système d'équations linéaires homogènes à p variables. Montrer que l'ensemble des vecteurs solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^p$.*

Proposition 1.3 (Intersection de deux sous-espaces)**.**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Alors l'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

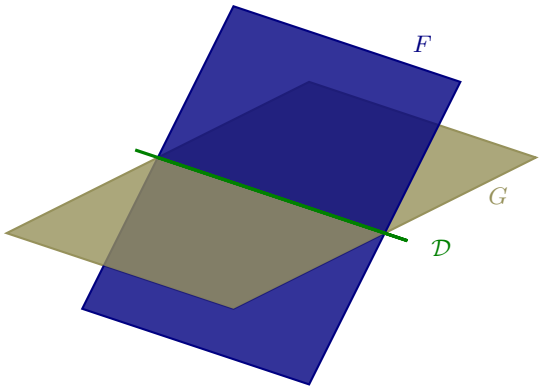
Corollaire (Généralisation)**.**
L'intersection $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \ldots \cap F_n$ d'une famille de n sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 1.5. *Soit $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$ défini par :*

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y + z = 0 \quad \text{et} \quad x - y + 2z = 0\right\}.$$

Est-ce que $\mathcal{D}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$? L'ensemble $\mathcal{D}$ est l'intersection de F et G, les sous-ensembles de $\mathbf{R}^3$ définis par :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\right\}$$
$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\right\}$$



Ce sont deux plans passant par l'origine, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$. Ainsi $\mathcal{D} = F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, c'est une droite vectorielle.

Attention

La réunion de deux sev de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E.

2 Familles finies de vecteurs

2.1 Familles génératrices

Définition 2.1 (Combinaison linéaire)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbf{N}^*$ et $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$.
On dit qu'un vecteur x de E est ***combinaison linéaire*** *des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ s'il existe un n-uplet de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que :*

$$x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k.$$

Proposition 2.1 (Structure de l'ensemble des combinaisons linéaires)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbf{N}^*$ et $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$. Ce sous-espace vectoriel est appelé ***sous-espace engendré par les vecteurs*** *$v_1, \ldots, v_n$*

Méthodologie. On peut démontrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E en montrant que F est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs de E.

Définition 2.2 (Familles génératrices)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbf{N}^*$ et $\{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de n vecteurs de E. On dit que $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une ***famille génératrice*** *de E si $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) = E$. Autrement dit :*

$$\forall x \in E,\ \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k.$$

Remarque.

Lorsque un ev F est tel que $F = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 \neq 0_F$, on dit que F est une **droite vectorielle** et si $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec (v_1, v_2) non colinéaires, on dit que F est un **plan vectoriel**.

Exemple 2.1.

- $\{1\}$ *est une famille génératrice du* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $\mathbf{K}$.
- $\{1, \mathrm{i}\}$ *est une famille génératrice du* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$.
- $\{1, X, \dots, X^n\}$ *est une famille génératrice du* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $\mathbf{K}_n[X]$.
- *Soit* $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ / \ 3x + 2y + z = 0\}$. *Montrons que F est un plan vectoriel de* $\mathbf{R}^3$, *pour cela déterminons une famille génératrice de F.*

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in F \quad &\iff \quad z = -3x - 2y \\ &\iff \quad (x, y, z) = (x, y, -3x - 2y) \\ &\iff \quad (x, y, z) = x(1, 0, -3) + y(0, 1, -2) \end{aligned}$$

Donc $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 0, -3)$ et $v = (0, 1, -2)$ qui sont clairement non colinéaires. C'est bien un plan vectoriel.

Proposition 2.2 (Surfamille génératrice)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $n, p \in \mathbf{N}^*$, $p > n$ et $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_p) \in E^p$. Si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille génératrice de E, alors $(v_1, \dots, v_n, \dots, v_p)$ est aussi une famille génératrice de E, cette famille est appelée ***surfamille****.*

Proposition 2.3 (Sous-famille génératrice)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbf{N}^*$ et $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ des vecteurs de E.
Si $E = \mathrm{Vect}\,(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ et $v_{n+1} \in \mathrm{Vect}\,(v_1, \dots, v_n)$, alors $E = \mathrm{Vect}\,(v_1, \dots, v_n)$. La famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ est appelée ***sous-famille génératrice*** *de E.*

Remarque. Cette proposition affirme que l'on peut supprimer d'une une famille génératrice les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres vecteurs. La sous-famille obtenue reste génératrice de E. Ce procédé permet donc de trouver des familles génératrices de cardinal minimal.

2.2 Familles libres - Familles liées

Définition 2.3 (Familles libres - Familles liées)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbf{N}^*$ et $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E.

— *On dit que $(v_1, \dots, v_n)$ est une* ***famille libre*** *de E si :*

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

— *On dit que $(v_1, \dots, v_n)$ est une* ***famille liée*** *de E si elle n'est pas libre, autrement dit :*

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\},\ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E.$$

Remarques.
— *On dit que les éléments d'une famille libre(resp. liée) sont* ***linéairement indépendants*** *(resp.* ***linéairement dépendants****).*
— *Toute famille contenant 0_E est liée.*
— *Pour tout vecteur v non-nul de E, la famille $\{v\}$ est libre.*

Exemple 2.2.
— *$\{1\}$ est une famille libre du $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{K}$.*
— *$\{1, \mathrm{i}\}$ est une famille libre du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$.*
— *$\{1, X, \dots, X^n\}$ est une famille libre du $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{K}_n[X]$.*
— *Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{C}}$, la famille $\left(t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$ est libre.*

Proposition 2.4 (Famille liée)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbf{N}^*$ et $(v_1, \dots, v_n)$ des vecteurs de E.
La famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée si, et seulement si, un au moins des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres vecteurs.

Remarque. Pour deux vecteurs v_1, v_2 de E, (v_1, v_2) est liée si, et seulement si, v_1 et v_2 sont colinéaires *i.e.* il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$.

Définition 2.4 (Polynômes de degrés échelonnés)**.**
La famille $(P_0, ..., P_n)$ de polynômes de $\mathbf{K}[X]$ est dite de degrés échelonnés si :

$$\deg(P_0) < \dots < \deg(P_n).$$

Proposition 2.5 (Sous-famille libre)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbf{N}^*$ et $(v_1, \dots, v_p) \in E^p$. Si $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille libre de E, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n < p$, alors la sous-famille $(v_1, \dots, v_n)$ est aussi une famille libre de E.

Proposition 2.6 (Famille libre dans $\mathbf{K}[X]$)**.**
Toute famille finie de polynômes non nuls $\mathbf{K}[X]$ et de degrés échelonnés est libre.

Proposition 2.7 (Surfamille libre)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbf{N}^*$ et $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ des vecteurs de E.
Si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre et $v_{n+1} \notin \mathrm{Vect}\,(v_1, \dots, v_n)$, alors $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ est aussi une famille libre de E.

Remarque. Cette proposition affirme que l'on peut ajouter à une une famille libre des vecteurs qui ne sont pas combinaisons linéaires des autres vecteurs. La surfamille obtenue reste libre dans E. Ce procédé permet donc de trouver des familles libres de cardinal de plus en plus grand.

2.3 Bases

Définition 2.5 (Base)**.**
*Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbf{N}^*$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E. On dit que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une **base** de E si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille libre et génératrice.*

Exemple 2.3.
- $\{1\}$ *est une base du* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $\mathbf{K}$.
- $\{1, \mathrm{i}\}$ *est une base du* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$.
- $\{1, X, \ldots, X^n\}$ *est une base du* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $\mathbf{K}_n[X]$.
- *La famille* (u, v) *avec* $u = (1, 0, -3)$ *et* $v = (0, 1, -2)$ *est une base du* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, 3x + 2y + z = 0\}$.

Théorème 2.1 (Décomposition dans une base)**.**
Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E est une base de E si, et seulemnt si :

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k;$$

*$(x_1, \ldots, x_n)$ sont appelés **coordonnées** (ou **composantes**) de x dans $\mathcal{B}$.*

Exemple 2.4. *Soient $u = (1, 2)$ et $v = (3, 4)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$, montrer que $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de $\mathbf{R}^2$ et déterminer les coordonnées de $(3, 2)$ dans cette base.*

Théorème-Définition 2.1 (Base canonique de $\mathbf{K}^n$)**.**
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Dans le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{K}^n$, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de n vecteurs de E définis par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \quad (\textit{le } 1 \textit{ est à la } i\textit{-ème place})$$

*est une base de $\mathbf{K}^n$ appelée **base canonique** de $\mathbf{K}^n$.*

Exemple 2.5.
- *La famille $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ est la base canonique de $\mathbf{R}^2$.*
- *La famille $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.*
- *La famille $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On rappelle que $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1. $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$*
- *Soit $E = \mathrm{Vect}\,(\sin, \cos)$ et $f : x \mapsto \sin(x - \pi/4)$.Montrer que $\mathcal{B} = (\sin, \cos)$ est une base de E, montrer que $f \in E$ et déterminer ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.*

Remarque. Il existe des espaces vectoriels ayant des bases comportant un nombre infini d'éléménts : $\mathbf{K}[X]$ admet comme base $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$.
Autre exemple, une base de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, ensemble des suites avec $e_i = (\delta_{i,n})_n$ suite dont tous les termes sont nuls sauf le i-ème terme qui vaut 1, $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ possède donc une base avec un nombre infini d'éléments.

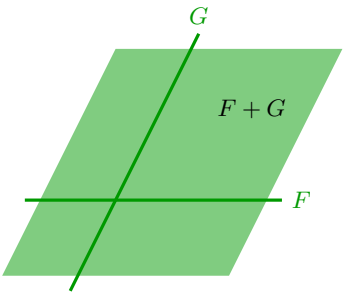
Théorème 2.2 (Existence d'une base)**.**
Tout espace vectoriel admet au moins une base

3 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Comme la réunion de deux sous-espaces vectoriels F et G n'est pas en général un sous-espace vectoriel, il est utile de connaître les sous-espaces vectoriels qui contiennent à la fois les deux sous-espaces vectoriels F et G, et en particulier le plus petit d'entre eux (au sens de l'inclusion).

3.1 Généralités

Définition 3.1 (Somme de deux sous-espaces)**.**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.
*L'ensemble $\{u+v \,/\, u \in F,\ v \in G\}$ est appelé **somme** des sous-espaces vectoriels F et G.*
Cette somme est notée $F+G$.



Remarque. On a $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$.

Attention
Bien que $F \cup G \subset F+G$, mais l'on a $F \cup G \neq F+G$. On verra dans la prochaine proposition que $F+G$ est le plus petit espace vectoriel contenant $F \cup G$.

Proposition 3.1.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque. $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F \cup G$.

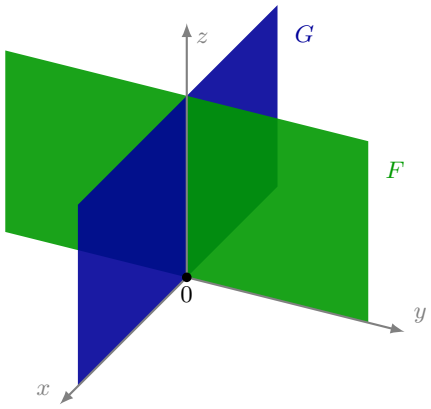
Proposition 3.2 (Somme d'espaces vectoriels engendrés)**.**
Soit $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_n)$ des éléments d'un espace vectoriel. Si $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_n)$, alors $F+G = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_n)$.

Exemple 3.1. *Déterminons $F+G$ dans le cas où F et G sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ suivants :*

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = z = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = z = 0\right\}.$$

Exemple 3.2. *Soient F et G les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ suivants :*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0\}.$$



Dans cet exemple, montrons que $F + G = \mathbf{R}^3$.

3.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 3.2 (Définition de la somme directe de deux sous-espaces)**.**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en ***somme directe*** *dans E si*

(i) $F \cap G = \{0_E\}$;
(ii) $F + G = E$.

On note alors $F \oplus G = E$ et on dit aussi que F et G sont des sous-espaces vectoriels ***supplémentaires*** *dans E.*

Proposition 3.3 (Décomposition dans une somme directe)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On a $F \oplus G = E$ si, et seulement si, tout élément de E s'écrit d'une manière ***unique*** *comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. Autrement dit :*

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, x_2) \in F \times G,\ x = x_1 + x_2.$$

Remarque.
— Il n'y a pas unicité du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel donné.
— L'existence d'un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel sera prouvée dans le cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie.

Exemple 3.3. *Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on considère le sous-espace vectoriel des fonctions paires $\mathcal{P}$ et le sous-espace vectoriel des fonctions impaires $\mathcal{I}$. Montrons que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.*

Proposition 3.4 (Base d'une somme directe)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et F, G deux sev de E. Si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de F et $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_p)$ est une base de G, alors $E = F \oplus G$ si, et seulement si, $(e_1, e_2, \ldots, e_n, e'_1, e'_2, \ldots, e'_p)$ est une base de E.

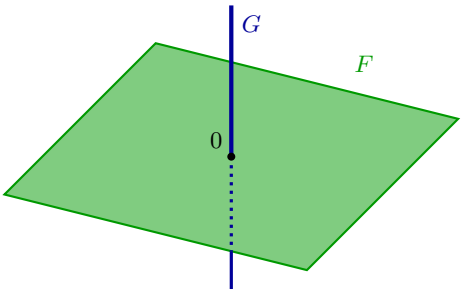
Exemple 3.4.

1. *Soient* $F = \{(x,0) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\}$ *et* $G = \{(0,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \in \mathbf{R}\}$.
   Montrons que $F \oplus G = \mathbf{R}^2$.
2. *Gardons* F *et notons* $G' = \{(x,x) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\}$. *Montrons que l'on a aussi* $F \oplus G' = \mathbf{R}^2$.
3. *De façon plus générale, deux droites distinctes du plan passant par l'origine forment des sous-espaces supplémentaires.*

Exemple 3.5. *Est-ce que les sous-espaces vectoriels* F *et* G *de* $\mathbf{R}^3$ *définis par*

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y - z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = z = 0\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$ *?*



Exercices d'application.

1. *Trouver des sous-espaces vectoriels distincts* F *et* G *de* $\mathbf{R}^3$ *tels que*
   (a) $F + G = \mathbf{R}^3$ *et* $F \cap G \neq \{0\}$;
   (b) $F + G \neq \mathbf{R}^3$ *et* $F \cap G = \{0\}$;
   (c) $F + G = \mathbf{R}^3$ *et* $F \cap G = \{0\}$;
   (d) $F + G \neq \mathbf{R}^3$ *et* $F \cap G \neq \{0\}$.
2. *Soient* $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ *et* $G = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\} \subset \mathbf{R}^3$.
   (a) *Montrer que* F *est un espace vectoriel. Trouver deux vecteurs* u, v *tels que* $F = \mathrm{Vect}(u,v)$.
   (b) *Calculer* $F \cap G$ *et montrer que* $F + G = \mathbf{R}^3$. *Que conclure ?*
3. *Soient* $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *des matrices de* $M_2(\mathbf{R})$.
   (a) *Quel est l'espace vectoriel* F *engendré par* A *et* B *? Idem avec* G *engendré par* C *et* D.
   (b) *Calculer* $F \cap G$. *Montrer que* $F + G = M_2(\mathbf{R})$. *Conclure.*