

TD 9 : Entiers - Dénombrements

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes

- 1/ Déterminer l'ensemble des entiers naturels $m \neq 1$ tels que $m - 1$ divise $15m + 4$.
- 2/ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $7^n + 11$ est divisible par 6.
- 3/ Déterminer tous les couples d'entiers naturels (x, y) vérifiant : $(x + 6)(y - 2) = 77$.
- 4/ Soit n un entier naturel non nul, déterminer le reste de la division euclidienne de $3^n - 1$ par 3^{n-1} .
- 5/ Soit n un entier naturel non nul, démontrer que $30n + 7$ n'est pas la somme de deux nombres premiers.

Exercice 2

Soient n et d deux entiers naturels non nuls tels que $d \leq n$. Montrer que $2^n - 1$ est divisible par $2^d - 1$ si d divise n .

Exercice 3

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. À quelles conditions le nombre $p = a^4 + 4b^4$ est-il premier ?

Exercice 4

Décomposer $n = 21\ 954\ 744$ en produit de nombres premiers.

En déduire le nombre de diviseurs de n . Calculer ensuite la somme de tous les diviseurs de n .

Exercice 5

Déterminer le PGCD des entiers 157 388 et 31 850 :

1. en utilisant l'algorithme d'Euclide ;
2. en utilisant la décomposition en produit de nombres premiers.

Exercice 6

Calculer le nombre d'anagrammes du mot RELATION.

Exercice 7

Soit E un ensemble fini et A, B, C des parties de E . Démontrer que :

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C).$$

Exercice 8

Soit $n \geq 3$. On considère un polygone convexe à n côtés.

- 1/ Déterminer le nombre de triangles que l'on peut former.
- 2/ Déterminer le nombre de diagonales joignant les sommets .
- 3/ Déterminer le nombre d'intersections entre les diagonales si l'on suppose que 2 diagonales ne sont jamais parallèles et que 3 diagonales ne sont jamais concourantes.

Exercice 9

Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 5 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2. Combien y a-t-il de tirages contenant : la dame de pique ? exactement deux cœurs ? au moins un roi ? ni as ni carreaux ? exactement deux valets et deux trèfles ?

Exercice 10

On dispose d'une urne contenant 5 boules blanches numérotées de 1 à 5, 4 boules noires numérotées de 1 à 4, et 3 boules rouges numérotées de 1 à 3.

1. On tire simultanément 3 boules dans l'urne.

Déterminer :

- le nombre de tirages possibles ;
- le nombre de tirages contenant la boule rouge numérotée 1 ;
- le nombre de tirages contenant exactement 2 boules noires ;
- le nombre de tirages contenant au moins 1 boule blanche.

Répondre aux mêmes questions.

2. On tire successivement 3 boules dans l'urne, sans remettre de boule.

Répondre aux mêmes questions.