

TD AL 2 : Ensembles - Applications

Exercice 1

Soit E un ensemble. Montrer pour toutes parties A, B et C de E :

1/ $A \subset B \iff A \cup B = B$;

2/ $A = B \iff A \cup B = A \cap B$;

3/ $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A} \iff A \setminus B = \emptyset \iff \overline{A} \cup B = E$;

Exercice 2

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E .

Montrer que $A \Delta B = C \implies (A \Delta C = B \text{ et } B \Delta C = A)$.

Exercice 3

Soient F, G et H trois sous-ensembles non vides d'un ensemble E . Montrer que :

$$[(F \cup G) \subset (F \cup H) \text{ et } (F \cap G) \subset (F \cap H)] \implies (G \subset H).$$

Exercice 4

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes :

1/ $f : \llbracket 0, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 0, 2n \rrbracket, f : k \mapsto 2k$

4/ $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto \frac{x}{x-1}$.

2/ $f : [0; 1] \rightarrow [-1; 1], f : x \mapsto x^2$

5/ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f : (x, y) \mapsto (x + y, xy)$.

3/ $f : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1], f : x \mapsto \sin x$

6/ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f : (x, y) \mapsto (x - y, x + y^2)$.

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

$$f(x) = 2x \text{ et } g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}.$$

1/ Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g .

2/ Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$, conclure.

Exercice 6

Soient E, F, G des ensembles ; $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ des applications. Montrez que :

1/

a) Montrer que pour toutes parties A et B de E , on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

b) Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

c) Montrer que si pour toutes parties A et B de E , $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ alors f est injective.

2/ Montrer que pour toutes parties Y_1 et Y_2 de F , $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

3/ si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

4/ si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 7

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Montrez que :

1/ f surjective $\iff (\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B)$.

2/ f injective $\iff (\forall A \in \mathcal{P}(E), f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)})$

Exercice 8

Déterminer les propriétés des relations $//$ (parallèle à) et $\perp$ (orthogonale à) dans l'ensemble des droites du plan.